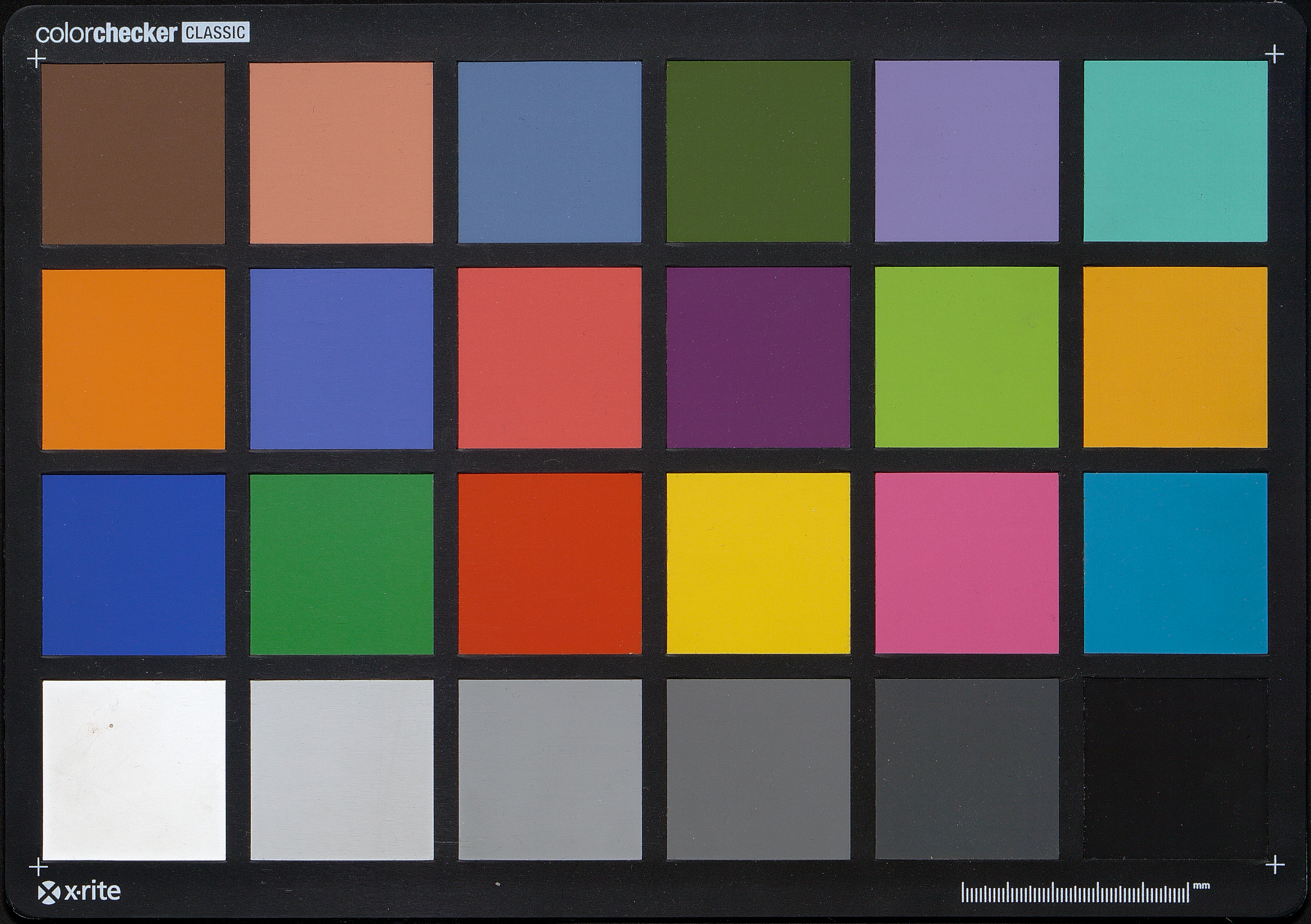

colorchecker CLASSIC
x-rite
mm

ASTRONOMIE
—
NOTES DE
COSMOGRAPHIE

E. M.

15

astronomie.

Notes de Cosmographie.

M. Maudhuy.

Extraits du Cours de Mr. Leverrier,

Professé à la Sorbonne, l'année Classique 1853-1853.

Première Leçon.

---

1. Dans une Science aussi avancée que l'astronomie, et qui est constituée depuis plusieurs Siècles, tous les phénomènes s'enchaînent: et pour traiter de chacun d'eux en particulier, il est Impossible de ne pas faire allusion à la plupart des autres. aussi commencerons-nous par une exposition Générale de l'ensemble de ces phénomènes.

2. L'astre qui a le plus d'utilité et d'importance pour nous est le Soleil. Sa masse est Enorme. Son Diam. = 110 fois celui de la Terre, et Vol = 1400000 f. celui de la Terre.

Placé au centre de notre Système planétaire, le Soleil est Composé d'une masse que l'on ne croit pas aussi brillante que l'extérieur. Cette partie extérieure, appelée Photosphère, est la seule qui nous envoie les ~~Ray~~ vibrations lumineuses et Calorifiques. — On a déduit cette conséquence de l'observation de la Lumière et des Taches Solaires.

Le Jour a lieu quand le Soleil est au-dessus de l'Horizon. — La nuit existe quand il est au-dessous.

C'est pendant la nuit qu'on aperçoit les Etoiles.

3. Les Etoiles sont autant de Soleils. — On les Range par Grandeurs. Certaines observations ont conduit à penser que les Etoiles de 2e. Gr. sont comparables à notre Soleil: de Sorte que cet astre, s'il prenait place parmi les Etoiles, n'en serait pas la plus Brillante.

Malgré leur Enorme masse, les Etoiles nous Envoient bien peu de Lumière. Cela vient de leur Grande distance, et de la loi Physique que l'Intensité de la Lumière varie en Raison Inverse du Carré de la distance. La distance du Soleil à la Terre n'est Rien en comparaison de l'Eloignement des Etoiles.

On a pu mesurer la distance de la Terre à quelques Etoiles, et l'on a Trouvé que la plus voisine de toutes (α du Centaure — Hemisphère austral) est à une distance du Soleil = 300000 fois la distance de la Terre au Soleil. La 61e du Cygne est la plus voisine après, et elle est 3 f. plus loin.

Nous ne pouvons Représenter ces distances ni les mesurer à l'aide des longueurs qui sont à notre disposition. — Mais, pour en avoir une idée, rappelons-nous que la Lumière fait à-peu-près le Tour de la Terre en $\frac{1}{7}$ de Seconde de Temps: dans une Seule oscillation du pendule battant la Seconde, la lumière fait 7 à 8 fois le Tour de la Terre. Pour venir du Soleil jusqu'à nous, elle met $8^{m.}\ 17^{s}$. — Or, α du Centaure pourrait cesser d'exister, et nous ne nous en apercevrions que dans 3 années! — la 61e du Cygne, après 12 années! — Herschell disait que le Créateur a été peu prodigue de matière: il faudrait plutôt dire qu'il a prodigué l'Espace à la matière.

4. Il ne faudrait pas croire qu'aucune loi ne préside au groupement des étoiles dans le ciel.

Si nous considérons les étoiles les plus voisines de notre soleil, et que nous les représentions par des points, nous aurons un certain groupe. Mais, dans ce groupe, y a-t-il un nombre indéfini de points ? y en a-t-il toujours à des distances de plus en plus grandes ? Non. Nous admettons que les étoiles les plus voisines du soleil forment un certain groupe très-considérable, mais isolé, comparable aux îles nombreuses de l'archipel des mers du sud. - au-delà, il n'y en a plus.

5. Mais, avec des lunettes puissantes, on voit qu'à des distances beaucoup plus grandes, il y a d'autres groupes analogues formés d'étoiles très-brillantes.

Ces autres nébuleuses, vues avec un faible grossissement, apparaissent comme de petits disques blanchâtres. Puis, avec des grossissements de plus en plus grands, on les voit se résoudre en étoiles. -

On compte les nébuleuses par milliers.

6. Quel est le nombre des étoiles qui se trouvent dans notre nébuleuse ? Les dimensions de ce groupe sont énormes : l'étoile la plus voisine est telle que la lumière met 4 ans à nous venir. Pour d'autres, Sirius, Castor et Pollux, Procyon, elle met 25 ans. Et il y a des étoiles visibles dans nos télescopes qui sont 1000 fois plus éloignées : leur lumière mettrait des milliers d'années à nous venir. Elles sont pourtant dans notre nébuleuse.

Herschell avait cru qu'avec son télescope, il avait découvert les dernières étoiles de notre nébuleuse : et il avait cru pouvoir assigner les dimensions du groupe. - Depuis, il a reconnu son erreur : avec des instruments plus puissants, il en a vu de nouvelles. On ne peut donc pas se flatter d'arriver jamais aux confins de cette nébuleuse.

En sommant toutes les étoiles que l'on a pu y apercevoir, on en trouve 25 000 000 : il y en a peut-être 1000 fois plus.

7. Les dimensions de chaque nébuleuse ne sont rien, si on les compare aux distances qui les séparent les unes des autres.

8. Jetons maintenant un coup-d'œil plus attentif sur les étoiles d'un groupe.

Lorsqu'on observe au moyen de lunettes ces étoiles disséminées dans le ciel avec tant de profusion, on voit qu'à côté de Castor, par ex. il se trouve une autre étoile dont la distance à Castor est très-petite par rapport aux distances des étoiles les unes des autres. L'ensemble de ces deux étoiles est une étoile double. - α de la Lyre est aussi double : la 61e. du Cygne, également : tandis qu'Arcturus et bien d'autres sont simples. - On arrive ainsi à cette conclusion que beaucoup d'étoiles sont formées de deux autres dont la distance est très-petite par rapport à celle de deux étoiles ordinaires.

Herschell conclut de là que ces étoiles ne sont pas voisines seulement en apparence, mais aussi en réalité.



En observant attentivement η de la Couronne, on a vu l'étoile B se déplacer et tourner autour de A en 65 ans. - C'est une preuve que ces 2 étoiles sont réellement voisines, et enchaînées l'une à l'autre par

les lois de l'attraction.

Le quart des Etoiles doubles est ainsi formé de deux soleils qui tournent les uns autour des autres, absolument comme une planète tourne autour du soleil. La nature de ces mouvements nous donnera des indications sur les masses de ces Etoiles. – C'est ainsi que nous reconnaîtrons que la 61e du Cygne a une masse égale au quart de celle du soleil.

Une Etoile d'Andromède est composée de 3 soleils. – Une autre est formée de 4. – Un dans la Nébuleuse d'Orion, il y en a 6.

9. En général, ces soleils liés entre eux ne sont pas de la même couleur. Si l'un est rouge, l'autre est vert; si l'un est blanc, l'autre est rouge…

Singuliers jeux de lumière que forment ces soleils éclairant un même corps.

Il y a un groupe de 110 Etoiles de toutes les couleurs: on peut le comparer à une brillante pièce de bijouterie.

10. Le mouvement étant une propriété générale de la matière, on doit bien prévoir que les Etoiles ne sont pas immobiles, et que α de la Lyre, la 61e du Cygne, etc. se déplacent. – Dans l'origine, on appela les Etoiles des fixes. Mais depuis un siècle, on a reconnu l'erreur. On a vu Sirius, Arcturus se déplacer de 2" par an. Ces déplacements s'ajoutent d'année en année. La 61e du Cygne marche chaque année de 5" dans le ciel. Une des Etoiles de l'Ourse parcourt 7" par an: il lui faudrait environ 190 000 ans pour faire le tour du ciel.

La vitesse de ces mouvements est considérable. Ainsi, la 1830e de Groombridge marche plus rapidement que la Terre, qui fait 7 lieues par seconde: – les mouvements angulaires sont très-petits, mais la vitesse réelle est très-grande.

Quelque rapides que soient ces mouvements, ils sont lents par rapport aux distances qui séparent les Etoiles les unes des autres. Ainsi, n'a-t-on pu jusqu'ici obtenir que de petits éléments des trajectoires stellaires. Mais il n'y a aucun doute qu'il ne soit donné aux générations à venir de voir ce chemin se continuer. – Une Etoile pourra ainsi arriver jusqu'aux limites de la nébuleuse, et en sortir: mais bientôt, l'attraction de l'ensemble l'y ferait rentrer. Ainsi les Etoiles voyagent dans leur groupe, et celles que nous apercevons maintenant pourront devenir invisibles.

De même, les Nébuleuses peuvent se déplacer les unes par rapport aux autres: mais ces mouvements sont très-lents.

11. Si toutes les Etoiles ont des mouvements propres, nous ne devons pas supposer que notre soleil ait eu le privilège de ne pas se mouvoir.

L'observation a montré en effet qu'il se meut. On est arrivé à cette conclusion en examinant l'ensemble des mouvements des Etoiles, et l'on a vu qu'il se dirige maintenant vers la constellation d'Hercule, en entraînant avec lui tout son cortège de planètes. –

Vers quelles destinées nous mène-t-il? (Mr. Lev. n'a pas la prétention de sonder ce mystère.)

12. Quelques esprits ont cherché à reconnaître par l'observation si les cieux sont incorruptibles, comme le disait Aristote, si quelque chose peut naître, quelque chose s'anéantir. – C'est là une question très-difficile à résoudre. Comment reconnaître d'une manière certaine que des Etoiles ont disparu?

Nous ne pouvons que comparer les cartes célestes exécutées de nos jours avec avec les catalogues de Flamstead, dressés en 1600. On reconnaît ainsi que certaines de ses étoiles ne se trouvent plus sur les cartes actuelles: il en manque plus de cent. S'il n'en manquait qu'une ou deux, il n'y aurait rien à dire: mais cent! mais aussi on a reconnu que Flamstead avait fait des erreurs d'écriture. - voilà la difficulté qui fait qu'on ne pourra jamais sans doute résoudre la question. car aucun catalogue n'est exempt d'erreurs.

13. Cependant, Herschell en Angleterre a observé à diverses reprises une très belle étoile, qui a disparu quelques années après: on ne l'a pas revue depuis. Il y aurait donc des étoiles qui pourraient s'éteindre?

Certains astronomes ont prétendu qu'il existe des nuages cosmiques non lumineux, et non transparents. alors, leur interposition ferait que l'étoile a disparu.

Il est aussi apparu des étoiles qu'on n'avait jamais vues auparavant. Hipparque, dans le but d'être utile à ses successeurs, a construit son catalogue à la suite de l'apparition de nouvelles étoiles.

cela peut s'expliquer encore au moyen de l'hypothèse des nuages cosmiques.

14. Il existe aussi des étoiles périodiques, et dont l'éclat varie d'une manière régulière.

En 2 jours ½ Algol passe de la seconde à la 4e grandeur, puis elle revient à la 2e, à la 4e, etc. - on a fait là-dessus diverses hypothèses.

Omikron de la baleine est aussi périodique: sa période est de 11 mois. Pendant 5 mois, cette étoile est visible, pendant 6 autres, elle a disparu. Pendant les 2 1ers mois et la moitié du 3e, d'imperceptible qu'elle était, elle arrive à la 2e grandeur, et elle décroît ensuite. Évidemt un pareil changemt est dû à la constitution intime de l'étoile.

Il y a aussi des étoiles périodiques pour lesquelles la variation de la lumière s'accomplit en plusieurs années.

Pourquoi n'y aurait-il pas des étoiles pour lesquelles la période serait de 50 ou 60 ou 200 ans? - Et alors les étoiles nouvelles et celles qui ont disparu s'expliqueraient facilemt.

15. Dans ces dernières années, dans le but d'augmenter le nombre des petites planètes, on a fait des cartes très précises de certaines parties du ciel, et Mr. Hind, en comparant sa carte avec une autre faite 3 mois auparavant, a vu qu'une étoile rouge jaunâtre avait apparu là où bien sûr elle n'était pas. - ce pourrait être une étoile périodique.

16. Phénomènes qui ont apparu tout-à-coup. - Kepler. - Tycho-Brahé. Cassiopée, 15 octobre 1592. - Histoire.

Nous allons maintenant nous réduire à notre système, qui est pourtant bien vaste. - alors nous pourrons prendre des mesures plus précises, et appliquer aux espaces célestes les lois découvertes par la mécanique.

2e. Leçon.

---

17. autour des Soleils que nous avons nommés Etoiles circulent probablement des planètes. Mais on ne les a jamais vues, et il est probable que jamais non plus on ne les apercevra.

18. Notre Soleil particulier, comme nous l'avons déjà dit, est un corps sphérique et lumineux. – Il est parfaitemt. sphérique : car, prenez le diam. dans un sens, puis dans un autre, .. et l'observation donne toujours le même résultat. Ceci est d'accord avec la théorie de l'attraction : car la rotation de cet astre est très-lente, et n'a pas dû exercer une grande influence sur sa figure.

19. autour du Soleil, et à des distances variables, circulent d'autres corps non lumineux par eux-mêmes, et qu'on appelle des Planètes.

(Soleil.)

20. Notre Terre est une planète. – Elle est très-petite par rapport au Soleil, et elle est aussi à peu-près sphérique. Son diamètre est environ le 116e. de celui du Soleil. Si le Soleil était figuré par un globe de 1m. de diam. celui qui représenterait la Terre aurait moins de 1 centimètre.

- Mercure
- Vénus
- La Terre
- Mars
- Jupiter
- Saturne
- Uranus
- Neptune.

21. Mercure, beaucoup plus petit que la Terre, est aussi plus près du Soleil. Puis vient Venus, entre le Soleil et Mercure la c Mercure et la Terre, qu'elle égale sensiblement en grosseur. – Puis, Mars. – Puis Jupiter, dont la masse est 355 f. plus grande que celle de la Terre : son diamètre est 7 fois celui de la Terre. Saturne, qui vient ensuite, est plus de 3 f. ½ gros comme la Terre. Uranus est les $\frac{2}{5}$ de Saturne en diamètre. Neptune est un peu plus gros qu'Uranus.

Donc, si l'on classe les Planètes par ordre de grosseurs, on aura

Jupiter. – Saturne. – Neptune. – Uranus. – {La Terre / Vénus} – Mars. – Mercure.

Plusieurs planètes se désignent souvent par des signes que nous ont légués les anciens :

☿	♀	♁	♂	♃	♄
Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne

Toutes ces planètes ne sont sphériques qu'à peu près.

L'aplatissement de la Terre est d'environ $\frac{1}{300}$.

Jupiter est le plus aplati : son aplatissemt. est de $\frac{1}{16}$: c.à.d. que si le rayon polaire est 16, le rayon équatorial est 17.

22. occupons-nous maintenant des distances des Planètes au Soleil.

Prenons pour le Soleil un globe d'un certain ~~de~~ ~~rayon~~ de rayon. centimètre de rayon (ou diam.?)

La Terre devra être placée à 1m,10, Vénus à 0m,7, Mercure à 0m,4 ; et Mars à 1m,5.

Les grosses Planètes sont beaucoup plus loin. – Si l'on représente par 1 la distance de la Terre au Soleil, celle de ♃ sera de 5, celle de ♄ sera 9, celle d'Uranus 18 : celle de Neptune est 30.

Il existe entre toutes ces distances une loi remarquable : – Loi ! le mot est un peu ambitieux ; – mais on ne peut l'omettre.

Veut-on trouver les distances du Soleil aux planètes Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus ? Prenons la progression géométrique :

Loi de Bode.	0	0,3	0,6	1,2	2,4	4,8	9,6	19,2

à tous ses termes, ajoutons 0,4 : nous aurons

	0,4	0,7	1	1,6	2,8	5,2	10	19,6
= Distance de	☿	♀	♁	♂		♃	♄	Uranus
	Exact.	Exact.	Exact.	Exact.		Exact.	Un peu gd.	Pas beaucp. trop gd.

Cette loi s'arrête là. – on trouverait pour Neptune 38,8, tandis que la vraie distance n'est guères supérieure à 30.

22. Dans la figure précédente, on a placé toutes les planètes les unes à la file des autres. – En réalité elles se meuvent dans des orbites à peu près sphériques. – La planète Mercure seule décrit une orbite très-elliptique. – Celle de Mars l'est aussi, mais un peu moins.

23. Durées des révolutions dans ces orbites :

Mercure – 88 jours.
Vénus – 228 "
Terre – 365 1/4
Mars – 707
Jupiter – 12 ans.

et les autres, encore plus :

Saturne – 30 ans
Uranus – 84 "
Neptune – 170 à 180.

Les durées de ces révolutions sont liées par une loi très-précise avec les distances des planètes au soleil : c'est la 3e. loi de Képler, et il a été 17 ans à la trouver.

24. Quand deux planètes se trouvent en ligne droite avec le soleil, on dit qu'elles sont en **Conjonction**.

Les astronomes Chinois signalent une grande conjonction qui aurait eu lieu entre toutes les planètes qu'ils connaissaient. – Mais l'exactitude de nos tables astronomiques est telle que nous pouvons affirmer que cette conjonction n'était pas précise : autrement, il faudrait remonter à plusieurs milliers de siècles.

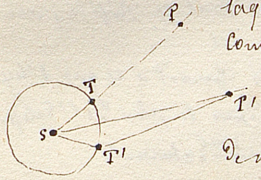
Dans l'astrologie, toute conjonction menaçait la destinée d'un empire. Mais aujourd'hui !!

25. Dans la Loi de Bode, j'ai écrit un nombre au-dessous duquel il n'y a le ~~nom~~ d'aucune planète. c'est entre les nombres qui correspondent à Jupiter et Mars. C'est qu'en effet, suivant cette loi de décroissance, il y a à cette distance du soleil la place d'une planète qui devrait s'y trouver : il le faudrait pour que la Loi méritât ce nom et se prolongeât jusqu'à Uranus. – Képler disait qu'il y avait là un hiatus dans le ciel : et les anciens astronomes se préoccupèrent beaucoup de ce vide.

Maintenant, ce vide est rempli par plus de 10 corps, et, d'ici à 10 ans, on pourra aller jusqu'à la centaine si l'on y met du zèle : (ici, Mr. Lev. ajoute : Je ne me suis pas mis à la remorque du procédé d'invention qui a fait découvrir ces petites planètes : on a commencé par où je finis, par l'observation. Mais, quand on veut aller rapidemt. il faut suivre une marche synthétique.)

26. Le 1er. jour de la 1ère année de ce siècle, le 1er janvier 1800 fut celui où la 1ère petite planète de ce groupe fut trouvée par Piazzi, théatin attaché à l'observatoire de Palerme. Il observa une petite étoile qui n'était pas dans son catalogue, et l'inscrivit. Un autre jour, il la rechercha, elle n'était plus à la même place.

C'était donc un astre errant, Cérès, qu'il appela Ferdinandea. — On n'en avait alors observé dans le ciel qu'un arc très-petit; puis elle s'était perdue dans le crépuscule, de manière qu'on n'avait pu faire dessus qu'un très-petit nombre d'observations. Une crainte s'empara des astronomes: pourrait-on la retrouver? — Cela peut nous étonner, maintenant que nous savons qu'après 15 jours d'observations, on connaît l'orbite d'une planète. — Mais à cette époque, les connaissances astronomiques étaient moins avancées qu'à présent: et d'ailleurs, la détermination de l'orbite d'une planète offre en effet beaucoup de difficultés. — Si nous étions au centre du Soleil, et que nous puissions observer une planète dans quelques unes de ses positions, nous aurions la loi du mouvement, et nous pourrions en conclure la marche de la planète. — Mais nous sommes sur la Terre; et, en même temps qu'on l'observe, la Terre marche: et en outre, on connaît simplement la direction dans laquelle se trouve l'astre: mais on ne sait rien des distances: c'est là ce qui complique la question. Si l'on savait la distance exacte, par une triangulation,



on saurait quelle est la distance de la planète au Soleil: car, avec ST', et T'P', on calculerait facilement SP'. — C'est en s'aidant de considérations de mécanique que Gauss est arrivé à résoudre le problème au moyen de 3 observations: son mémoire est intitulé: Theoria motus Corporum Cœlestium in Sectionibus Conicis circa Solem ambientium. — Il n'est pas inutile de relever ici une erreur fréquente. On croit que, construire une orbite elliptique au moyen de 3 points, c'est le même problème que de trouver l'orbite d'une planète avec 3 observations. Cela n'a aucun rapport, parce que, lorsqu'on donne 3 points pour déterminer une ellipse, on donne ces 3 points physiquement: il y a pour une demi-heure de calcul. — Mais, pour calculer l'orbite, il faut 3 ou 4 jours.

Gauss a fait l'application de sa théorie à Cérès, et a déterminé sa place l'année suivante avec une grande approximation au moyen de 3 observations.

27. Quelque temps après, une nouvelle planète fut trouvée en Allemagne, puis une troisième: et, chose remarquable, ces 3 premières petites planètes se trouvaient juste à la place de l'hiatus. — Cérès était excessivement petite: c'est une planète télescopique ayant, même dans les lunettes, une grandeur insensible. — Les anglais n'avaient pas voulu lui donner le nom de planète: ils l'ont appelée un astéroïde, pour la distinguer des grosses planètes telles qu'Uranus, découvert par Herschell, un de leurs compatriotes.

28. Ce fut alors que la sagacité des astronomes et du public s'exerça pour trouver pourquoi il y avait en ce point du ciel trois petites planètes au lieu d'une seule plus grande. — Voici l'hypothèse de l'astronome **Olbers**. En construisant les orbites des 3 petites planètes déjà découvertes, il trouva que ces 3 orbites se coupent à très-peu près en un même point du ciel. Suivant lui, ce fait ne doit pas être dû au hasard, mais à quelque cause particulière. Il fit remarquer alors que lorsqu'un corps, soumis à l'action unique du Soleil, décrit autour de lui une orbite fermée, quelque allongée que soit cette orbite, le corps revient toujours passer nécessairement aux mêmes points: et alors, la question se transformait pour Olbers de la manière suivante: Si ces trois corps arrivent maintenant les uns après les autres en un même point du ciel, ils en ont dû partir ensemble; donc autrefois il y avait entre Mars et Jupiter une certaine planète qui aurait un beau jour fait explosion, et se serait brisée en morceaux! — Il y avait encore d'autres raisons qui faisaient penser à Olbers que son hypothèse était l'expression de la vérité. C'est que les grosses planètes se meuvent dans des plans très-peu inclinés

sur l'Ecliptique, } l'indique que l'orbite de Pallas est inclinée de 35°, et que, d'après les lois connues sur la stabilité du système du monde, cette planète devra y rester éternellement. – on en concluait que, lors de l'explosion, Pallas avait reçu une impulsion perpendiculaire au plan de son orbite.

Lagrange chercha alors ce qui arriverait si une planète était ainsi brisée en éclats, et arriva par le calcul à des résultats analogues.

29. Olbers ajoutait:

Si mon hypothèse est exacte, si les petites planètes proviennent de l'explosion d'une grosse, il doit y en avoir plus de trois: et alors, il y a dans le ciel une sorte de défilé où nous devons trouver tous les morceaux; et, en les attendant dans ce passage, on les découvrira.

C'est ainsi qu'Olbers découvrit une 2e. petite planète qu'il nomma Vesta.

Malheureusement, ce fut tout, et l'on eut beau chercher dans ce défilé, on n'y trouva plus rien.

30. Les choses en restèrent là pendant 26 ans. – Mais cela tenait à ce que l'hypothèse d'Olbers était trop hasardeuse. – Si Pallas n'est pas dans le plan de l'Ecliptique ou auprès, cela tient à l'action combinée de Jupiter et de Saturne.

31. Puis, quand on a trouvé les autres planètes, on a vu qu'elles ne passent pas au même point.

Voici les planètes dans l'ordre de leur découverte:

Uranus	– Herschell.	
Cérès	– Piazzi	1er. Janvier 1801.
Pallas	– Olbers	1802
Junon	– Harding	1804
Vesta	– Olbers	1807
Astrée	– Hencke	8 Décembre 1845
Neptune	– Galle (d'après indicat. de Leverrier)	Septembre 1846.
Hébée	– Hencke	1er Juillet 1847.
Iris	– Hind	13 aout 1847
Flore	– Hind	18 octobre 1847
Met.	– Graham	26 avril 1848.

Mais ce n'est pas tout: on en a beaucoup trouvé depuis: Mr. Hind seul en a trouvé 7: De Gasparis à Naples en a découvert presque autant.

Ainsi, il faut renoncer à l'hypothèse d'Olbers; – et c'est ce que du reste nous ferons facilement quand nous serons arrivés à la fin du cours: – l'existence de grosses planètes est beaucoup plus extraordinaire que celle des petites. – En étudiant les causes qui ont pu amener notre système à son état actuel, nous verrons qu'il faut reconnaître ici un cas particulier de la manière générale dont les planètes se sont formées.

3e. Leçon.

32. Nous allons maintenant nous occuper de la méthode par laquelle on peut rechercher ces petites planètes. Il ne faut pas croire que leur découverte soit due au hasard; et puis, l'intérêt qu'elles présentent augmente à mesure qu'on en trouve davantage: car on pourra peut-être trouver une loi dans la disposition de ces petites masses.

33. On ne trouve une petite planète qu'après 2 mois ou 1 an de persévérance: et il y a un très-grand mérite à trouver ces petits astres: on y arrive en comparant très-souvent l'état du ciel au moment où l'on observe avec un état ~~obs~~ constaté précédemment et inscrit sur une carte: si l'on observait le ciel à bâtons rompus, on ne trouverait rien. Dans une lunette, en effet, la planète paraît comme une étoile, et, dans le temps très-court d'une observation, on la croit fixe. Il faut donc faire une carte très-exacte. — Quand on dirige la lunette vers une partie du ciel, à cause de la forme du verre, on n'aperçoit qu'un champs très-restreint limité par une circonférence. Il faut représenter sur le papier la situation des étoiles que l'on observe. Quoique les étoiles se comptent par milliers, par millions même, il n'y en a jamais qu'un petit nombre dans le champ, à ~~moins~~ que l'on ne tombe sur une nébuleuse: mais nous supposons ici qu'on ne s'occupe que de notre groupe. — Il s'agit de faire une bonne carte par un procédé rapide, et assez exact pourtant pour le but qu'on se propose. — On commence par tendre dans la lunette une série de fils de platine très-fins et verticaux, qui se détachent en noir sur le fond toujours un peu éclairé du ciel: si pourtant on ne les voyait pas, on serait obligé d'éclairer le champs par un procédé artificiel. — Puis on tend une autre série de fils horizontaux. — On peut donc reconnaître les étoiles, et les distinguer d'après les carrés dans lesquels elles se trouvent. — Alors, sur le papier, on trace une série de carrés correspondants à ceux du réticule. À la simple vue, et en estimant à peu près les distances, on transporte sur la carte les étoiles qu'on voit dans le ciel: ... c'est un moyen qu'on pourrait employer pour réduire un paysage.

Voilà tout ce que nous pouvons tirer de la position actuelle de la lunette.

On la déplace ensuite, de manière que le dernier carré de l'ancienne position soit commun à la nouvelle.

Le nombre des étoiles qu'il faut porter sur les cartes est prodigieux, et cette opération demande un temps considérable: — ces cartes n'ont pas été publiées.

La vie d'un astronome ne suffirait pas s'il fallait faire avec une aussi grande précision la carte du ciel entier. — Mais, remarquons que chaque planète décrit une orbe plane dont le plan passe par le centre du Soleil: ces orbites sont très-peu excentriques, et coupent un grand cercle quelconque de la sphère en deux points. On peut donc se borner à explorer avec un grand soin les étoiles situées dans une petite zone très-étroite faisant tout le tour de la sphère: cette carte nous rendra le même service que si la carte embrassait le ciel entier, puisque toutes les planètes y passeront nécessairement. — On a choisi naturellement le grand cercle écliptique.

Une fois qu'on est pourvu de ces cartes célestes, voici ce qui reste à faire pour découvrir de petites planètes. On observe fréquemment, le plus souvent possible les diverses parties de la carte avec une lunette, de manière à revenir aux mêmes points après 15 jours au plus d'intervalle. Si l'on ne trouve rien de changé, on n'a

rien découvert. Mais si, aux Etoiles qu'on a inscrites, il est venu s'en adjoindre une autre, il y a du nouveau. — Maintenant, il y a des difficultés. Cette Etoile n'existait-elle pas avant? la carte pouvait être inexacte. — Heureusement, ces cartes ont été faites par un assez grand nombre d'observateurs pour que l'on puisse compter sur leur exactitude. — Mais aussi, ce peut être une étoile nouvelle, une Etoile changeante périodique, qui n'avait pas de lumière sur le côté qu'on avait observé d'abord. M. Hind en a observé de pareilles. — Mais si l'Etoile nouvelle, le lendemain a changé de place, puis encore le surlendemain, ... alors on peut affirmer que l'on a sous les yeux une planète. — Ce n'est que par cet ensemble de recherches, qu'après des années de travail, que l'on arrive au but ambitionné. —

Enfin, il reste à constater si cette planète n'est pas identique à celles qu'on connaît déjà. Or, par le calcul ou par des constructions géométriques, on peut avoir, pour une heure quelconque, la position de toutes les planètes connues: il faut donc faire le calcul de la position de toutes les planètes connues pour l'heure de l'observation, et voir si aucune de ces positions ne coïncide avec celle de la planète observée.

---

34. Revenons maintenant à l'Etude des phénomènes généraux que présentent les planètes.

Sans exception, toutes circulent autour du Soleil. — Comment s'accomplissent ces mouvements? offrent-ils quelque chose de général? — Tous s'accomplissent dans des Ellipses; — mais ce n'est pas ce qui doit encore nous occuper. — Imaginons que, le Soleil étant fixe, la Terre tourne autour du Soleil: la Terre reste toujours dans un même plan. Toutes les planètes décrivent des orbes planes: et l'on peut ajouter qu'il en est de même des Comètes: mais, pour tous ces astres, et surtout pour les comètes, tous ces plans sont loin de coïncider, et sont inclinés d'une manière qcq. pour ces dernières:

35. Les planètes au contraire observent sans exception dans leur mouvement une loi qui trahit un certain ordre, et nous mettra sur la voie de l'origine de leur formation:

Toutes les Planètes se meuvent à très-peu près dans le plan de l'Ecliptique. (nous faisons abstraction de Pallas).

Dans ce plan où, sauf quelques légères inclinaisons, se meuvent toutes les Planètes,

Elles marchent toutes dans le même sens.

Il est impossible de méconnaître là une trace encore plus frappante d'une origine commune: et nous en trouverons d'autres preuves encore dans les nouvelles analogies que nous reconnaîtrons.

36. Cherchons à définir le sens de ce mouvement commun par rapport aux Etoiles.

Pour cela, prolongeons dans tous les sens le Plan de l'Ecliptique: il partagera la Sphère Céleste en deux Hémisphères dont l'un porte le nom

d'Hémisphère Nord, Boréal ou arctique, et l'autre, celui
d' " Sud, austral ou antarctique

Le mot arctique signifie Hémisphère des Ourses: Il y a en effet dans cette partie du Ciel deux Constellations qu'on appelle la Grande et la Petite Ourse.

Maintenant, suivez la Règle suivante, bizarre au premier abord, mais qui offre le seul moyen dont la mécanique dispose pour bien définir le sens d'un

mouvement quelconque.

Supposez-vous placé debout au Centre du Soleil sur le plan de l'Ecliptique, la Tête en dehors des Ourses. Dans cette Situation, chacune des Planètes passera devant vos yeux en allant de votre droite à votre Gauche.

C'est là le sens du mouvement, et c'est ainsi que nous pourrons nous représenter tous les mouvements Célestes.

Le sens de ce mouvement est de l'Ouest à l'Est. — Il s'agit, bien entendu, du mouvement réel, et non du mouvement diurne.

37. Ces analogies dans le sens du mouvement ne sont pas les seules qui existent.

Il existe en effet sur le Soleil des Taches dont l'observation a montré que cet astre tourne sur lui-même, en 25 jours. — De même que toutes les planètes se meuvent sur l'Ecliptique, de même le Soleil se tourne autour d'un axe perpendiculaire à ce plan (ou à l'axe) de l'Ecliptique : — et cela, dans quel sens ? De droite à gauche pour l'observateur placé au centre du Soleil comme ci-dessus, de l'Ouest à l'Est, dans le même sens que le mouvement des planètes.

Puisque le Soleil tourne sur lui-même, nous sommes conduits à nous demander si les Planètes n'en font pas autant.

Or, la Terre tourne en 24 h. de l'Ouest à l'Est autour d'un axe un peu incliné sur l'axe de l'Ecliptique.

Les Taches observées sur Mars ont montré qu'il tourne aussi dans le même sens, en 23 h.

Cette énorme planète qu'on appelle Jupiter possède des bandes Grises qui proviennent peut-être du mouvement rapide de ses nuages et de ses Taches. — En effet, sa Rotation s'effectue en 10 h : à l'Equateur de Jupiter, les Jours et les nuits ne durent que 5 heures. — De là aussi, le grand aplatissement de Jupiter, qui est de $\frac{1}{11}$. — D'ailleurs la Rotation a toujours lieu dans le même sens.

Il en est de même de Saturne.

ainsi :

En même Temps que les Planètes tournent autour du Soleil, elles tournent sur elles-mêmes, et le sens de cette 2e. Rotation est le même que celui de la 1re.

Nous allons encore trouver de nouvelles traces d'une Commune origine.

38. Nous avons dit que le monde Physique est un Ensemble de Nébuleuses, chaque Nébuleuse un ensemble de Soleils, et chaque Soleil est le centre d'un monde planétaire. — Voilà donc des Ensembles primaires, secondaires et tertiaires. Ce n'est pas Tout. — Il y a des corps d'un ordre inférieur qui circulent autour des planètes en suivant les mêmes lois que celles-ci dans leur course autour du Soleil : on les appelle des Satellites. — Il ne serait même pas étrange qu'il y eût des Satellites de Satellites : dans notre Système Solaire, il n'y en a probablement pas.

Tâchons de nous faire une idée de la Situation Respective de ces corps les uns vis-à-vis des autres.

Le Diamètre de la Lune est les $\frac{3}{11}$, ou sensiblement $\frac{1}{4}$ de celui de la Terre.

Les Satellites de Jupiter sont beaucoup moins gros : ce sont des corps excessivement petits par Rapport à la Grandeur de leur Planète. On a cru dans ces derniers temps leur reconnaître un Diamètre de 1".



Figurons une Terre de 1 décimètre de diamètre. — Son Rayon sera $0^m,05$ la Lune se trouve à $0^m,05 \times 60 = 3^m$. ainsi, là encore, les dimensions sont très-petites par Rapport à la distance.

Pour avoir la Relation de position avec le Soleil, il nous faut diminuer l'Echelle. Faisons un Soleil de $0^m,03$. La Terre est à $110 \times 0^m,03 = 3^m,3$. Le diamètre de la Terre sera très-petit, et nous le représenterons par un point. Où sera la Lune? La distance du Soleil à la Terre est 24000 Rayons terrestres, ou 110 diamètres solaires. Celle de la Lune à la Terre n'est que de 60 Rayons terrestres, c.a.d. $\frac{1}{400}$ de la précédente. La Lune est donc 400 fois plus près de la Terre que celle-ci du Soleil. Et on a $\frac{3^m,30}{400} = \frac{0,033}{4} = 0^m,008$, ou 8^{mm}. C'est bien peu : cela veut donc dire que la Lune accompagne toujours la Terre : ces deux corps sont tellement voisins l'un de l'autre que l'attraction du Soleil ne les peut séparer.

La figure ci-dessous montre à peu-près ces Rapports. — Elle fait voir aussi que



si l'on plaçait le centre du Soleil au centre de la Terre, le Globe Solaire embrasserait la Lune, et irait une fois au-delà.

La Lune tourne autour de la Terre en décrivant une orbite plane, qui est presque dans le plan de l'Ecliptique. — Dans ce plan, quel est le sens du mouvement? Toujours le même.

Enfin, l'observation a montré que la surface de la Lune est irrégulière, et travaillée par des Eruptions volcaniques. — On a prétendu que l'on avait aperçu certaines lueurs, ce qui prouverait que quelques uns de ces volcans ne sont pas <u>éteints</u>.

De plus, on a reconnu ainsi que le Globe Lunaire tourne sur lui-même, et dans le même sens que celui de sa Révolution autour de la Terre : ce qu'il y a de curieux, c'est que les durées de ces deux Rotations sont rigoureusement les mêmes.

39. Nous verrons que tous les autres Satellites des autres planètes tournent dans le sens direct.

Il y a exception pour un Satellite d'Uranus ; mais ce sera le cas de dire que l'exception confirme la Règle.

2e. Leçon.

40. Vénus n'a pas de Satellites. – Il y a 169 ans, Dominique Cassini crut en avoir trouvé un. Vénus lui apparaissait comme un disque semi-circulaire, mais semi-éclairé: il aperçut à la droite et du côté du Soleil un autre disque semi-éclairé qui aurait pu être tel un satellite.

Maraldi, l'un de ses disciples, qui a observé longtemps à l'observatoire de Paris, crut également deux fois apercevoir ce même phénomène. Comme depuis on n'a plus rien vu avec les meilleurs instruments, et comme leurs lunettes étaient bien moins parfaites que les nôtres, on croit qu'ils ont vu une image double.

41. Quant à Mercure et Mars, on ne leur a jamais voulu donner le moindre satellite.

42. Pour en trouver, il faut aller jusqu'à Jupiter, qui en a quatre, lesquels circulent autour de la planète en même temps que celle-ci les entraîne autour du Soleil.

Ces quatre Satellites sont sensiblement dans le plan de l'Equateur de la Planète. Ils tournent tous autour d'elle dans le sens direct.

Ils sont très-petits, paraissent comme des points, et circulent autour de Jupiter avec une grande rapidité.

Les temps de leurs Révolutions sont

42 heures,

Le premier surtout s'éclipse donc très-souvent.

Utilité de ces Eclipses pour déterminer avec exactitude la situation des côtes dans l'intérieur des mers: c'est un des phénomènes qui ont le plus contribué à l'avancement de la Géographie.

Vitesse de la Lumière.

La marche de ces satellites sert aussi à peser la planète, et à trouver que, si on la transportait à la même distance du Soleil où se trouve la Terre, elle pèserait 340 fois plus.

Quand on observe ces Satellites, comme on est placé dans le plan de l'Equateur de Jupiter, qui est celui de l'Ecliptique, où se trouve à peu-près la Terre, on voit ces satellites se mouvoir en ligne droite: mais on est averti qu'il n'en est pas ainsi par les ombres portées sur Jupiter.

C'est Galilée qui, après l'invention de sa Lunette, découvrit ces 4 Satellites, ainsi que les Phases de Vénus et bien d'autres choses encore.

43. Neptune n'a qu'un Satellite, découvert par Mr. Lassell.

44. Saturne a un Système fort riche: il a plusieurs Satellites, et un corps particulier, très-curieux, l'anneau. – Galilée n'avait rien vu avec sa Lunette, qui n'était pas assez puissante.

Huyghens, au moyen d'une grande Lunette, aperçut un premier Satellite. On prétend qu'à cette époque, on ne chercha plus, pendant quelque temps, de nouveaux satellites, et cela, pour une drôle de raison: on connaissait 6 planètes et 6 Satellites, et cela faisait, disait-on, un Système complet.

Plus tard, lorsque Dominique Cassini posséda ces grandes lunettes dont l'oculaire était dans la cour de l'observatoire, et l'objectif sur une tour, il trouva 3 nouveaux satellites de Saturne: cela faisait 4.

Vers la fin du dernier Siècle, Sir William Herschell, au moyen de son puissant Télescope, en trouva 3 autres : cela faisait 7.

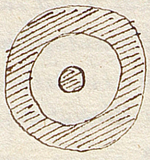
Enfin, il y a deux ans, on en a trouvé un 8e que sa proximité de la planète avait empêché d'apercevoir, et qui exécute sa Révolution en 5 jours.

C'est encore Mr. Lassella, de Liverpool, qui l'a découvert : on se rappelle que c'est lui qui a trouvé le Satellite de Neptune. — Mr. Lassella est un amateur d'astronomie. C'est un fabricant de bière, et il fait marcher de front une fabrique et un observatoire qu'il a fait construire avec ses bénéfices. Toute sa famille l'aide, et les dames se mêlent des livres de commerce et des Calculs. C'est ce qui est arrivé à la Sœur d'Herschell.

Saturne présente une autre singularité, découverte par Huyghens. — Lorsqu'on vint à examiner la planète avec des lunettes assez puissantes, on reconnut que Saturne présentait des appendices lumineux et oblongs de chaque côté du disque. Tantôt ils apparaissaient, tantôt devenaient invisibles, et affectaient des formes bizarres. — Huyghens éclaircit l'énigme, et annonça que Saturne était entouré d'un anneau qui ne tenait pas à la planète, qui était très-large et peu épais.

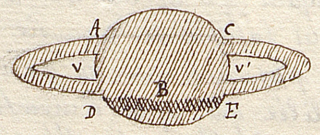


Il fallait, pour admettre cela, des preuves bien fortes, d'autant plus qu'à aucune époque le phénomène ne se montre ainsi :



car le plan de l'anneau n'est pas très-incliné sur celui de l'Ecliptique. On voit donc toujours le phénomène par la tranche. — Si les deux plans se fussent entièrement confondus, on n'aurait vu l'anneau que par la tranche rigoureusement : or, cet anneau est si mince, que, dans le cas, qui se présente quelquefois, où il n'y a que la tranche d'éclairée, on ne voit rien, même dans les Lunettes très-puissantes.

Mais heureusement, l'inclinaison du plan de l'anneau fait qu'on le voit dans une meilleure situation. — voici le dessin de ce qu'on aperçoit dans les cas les plus favorables :



Il n'y a aucune interruption de lumière : en B, on voit l'ombre de la partie antérieure de l'anneau. — ainsi, bien qu'on ne voie pas l'anneau, son existence est bien assurée : car, comme tout le système tourne, il est bien vrai que la partie qui est derrière, et que l'on voit à son tour, n'est pas absente : et l'existence de l'anneau comme tout continu est certaine. — En V et V', il y a une interruption de lumière : on voit le Ciel, et certains astronomes prétendent même y avoir vu des Etoiles : cela n'aurait rien d'extraordinaire.

Le plan de l'anneau, on l'a déjà vu, diffère peu de celui de l'Ecliptique. Cet anneau est-il fixe, ou tourne-t-il ? — Jusqu'ici, on n'a aperçu dessus aucune tache qui puisse démontrer physiquement sa Rotation. — Mais il ne peut pas ne pas tourner : car une voûte sollicitée à tomber vers Saturne,

dont la masse est considérable, ne pourrait résister, elle si peu épaisse, à cette attraction. ainsi, la théorie indique que l'anneau doit tourner: de plus, elle a montré que la vitesse de rotation nécessaire pour que l'anneau ne se brise pas est précisément la même qu'elle serait pour un satellite placé à la même distance de Saturne.

Cette considération a fait demander s'il n'était pas possible que l'anneau fût une masse de satellites formant un tout continu. — Il n'y a rien qui légitime cette hypothèse.

Cependant, ce que l'on peut affirmer, c'est qu'il y a plusieurs anneaux les uns sur les autres: l'anneau, dans de certaines conditions, présente une fissure noire, qui se reproduit des deux côtés. Il y a donc au moins deux anneaux. On a même cru en apercevoir 3. — ainsi l'anneau n'est pas tout d'une pièce.

Cet anneau est bien sûr l'un des phénomènes les plus curieux du système du monde. — Il nous paraîtra peut-être moins étonnant dans les dernières ~~ann~~ leçons: nous verrons que la matière, par suite du retrait, a dû se former en anneaux dont la rupture a donné les planètes.

L'anneau de Saturne est un monument de cette première modification de la matière, et les petites planètes en sont un de la modification intermédiaire: suivant les observations des astronomes de Pulkawa, à l'observatoire de St. Petersbourg, dont les mesures micrométriques sont plus précises que partout ailleurs, l'anneau de Saturne serait destiné à se briser: sa distance à la planète irait constamment en augmentant d'un côté et diminuant de l'autre: de sorte que, dans quelques dizaines d'années, l'anneau se frottera contre la planète, et toutes les parties de l'anneau, venant par la rotation passer aux mêmes points, s'abîmeront sur Saturne, et l'anneau sera complètement détruit. — Il est bien sûr d'ailleurs qu'en A il se passe quelque chose d'extraordinaire: car, il y a deux ans, lorsque l'anneau a reparu, on a trouvé du nouveau: on a vu qu'il s'était enrichi d'un nouvel anneau intérieur moins brillant que les autres, mais ayant pourtant encore assez de clarté pour être aperçu. On l'a vu en Amérique et en Angleterre. On ne sait ce que c'est que cet anneau. Est-ce une apparence qui disparaîtra de nouveau? Toujours est-il que son existence est d'autant plus sûre qu'on le voyait portant sur la planète une ombre grisâtre.

De tout cela, concluons que le système de Saturne n'est pas arrivé à un état d'équilibre stable. — Si nous devons voir la destruction de l'anneau, nous devrons admirer combien peu d'années ont séparé auront séparé la découverte des lunettes de ce cataclysme: — si l'anneau eût été détruit il y a 200 ans, nous n'aurions rien vu.

Après tout, ce mouvement de l'anneau n'est peut-être qu'une oscillation: de même que, de nos jours, la Lune va sans cesse en se rapprochant de la Terre: de sorte qu'on s'est demandé si elle ne finirait pas par tomber à la surface. Mais, après avoir suffisamment étudié la question, on a reconnu que ce rapprochement devait durer 20000 ans; puis, la lune s'éloignera de nouveau. ainsi, tout est réglé par un ordre admirable.

—

Nous en resterons là de l'exposition générale du système du monde.

—

De la Terre.

45. La première question à traiter est celle de la Terre. — Deux motifs nous y engagent : d'abord, la Terre a pour nous bien de l'intérêt, et à plus d'un titre ; — ensuite, c'est l'observatoire d'où nous ne pouvons sortir, et il faut bien connaître son observatoire, et ses mouvements.

Nous n'étudierons pas d'abord d'une manière sérieuse la forme de la Terre : plus tard, une leçon sera consacrée à la longueur du méridien et au mètre.

46. Quand on arrive à connaître la Terre, il y a lieu d'appliquer cette réflexion que, quand on étudie, on a plus à oublier qu'à apprendre. — Apparences trompeuses. — Il semble au premier abord qu'il n'y a aucune analogie entre la Terre et les autres corps célestes.

Astronomie (αστης, νομος) — Astrologie (αστης, λογος).

Dans l'origine, c'étaient deux mots qui désignaient une seule et même chose.

La Terre ne nous paraît pas brillante, comme Vénus, Mars, etc.

Tous les corps célestes sont mobiles : la Terre seule nous paraît immobile. C'est une illusion : mouvements relatifs : — bateau — cabine — wagon.

La Terre est isolée dans l'espace : astres qui se lèvent et se couchent.

47. C'est une sphère.

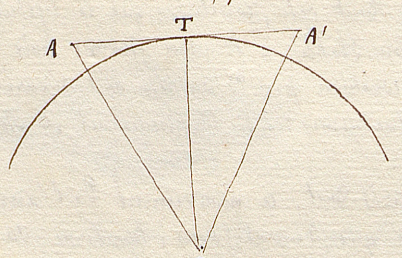
En effet : d'abord, elle est à peu près ronde : voyage de Magellan.

Puis, on peut montrer que la Terre est une sphère. — Dans les montagnes, plus on s'élève, plus l'horizon que l'on découvre est étendu.

Phénomènes qu'on aperçoit quand on revient de la pleine mer vers une côte montagneuse.

Si la Terre est une sphère, il est nécessaire que quand on s'élève, en un point quelconque, d'une même hauteur au-dessus de la surface, on voie toujours la même étendue. — Or, partout les marins, en mesurant la dépression de l'horizon, la trouvent constante.

On peut même obtenir une première approximation du diamètre. Supposons en effet deux observateurs, placés en A et A', à 3^m au-dessus du



niveau de la mer, comme cela arrive sur le pont des navires marchands. Le premier voit le second, et réciproquement. Ils cesseront de s'apercevoir au moment où le rayon AA' rasera la surface de la Terre. — On trouve alors que $AA' = 12700^m$. — Dans le triangle rectangle ATC, on a

$$AT = \frac{12700^m}{2} = 6350^m.$$

$$TC = r \quad \text{et} \quad AC = 3^m + r$$

Une construction géométrique ne donnerait rien de bon. Elle se réduirait à trouver un triangle rectangle quand on connaît un côté et la différence

entre l'hypoténuse et l'autre côté : or les deux lignes AT et TC seraient presque parallèles, et le point C mal déterminé. — Mais le calcul donne

$$(r+3)^2 = r^2 + (6350)^2$$

ou

$$r^2 + 6r + 9 = r^2 + (6350)^2$$

d'où

$$r = \frac{(6350)^2 - 9}{6} = \frac{40320000}{6} \text{ à peu près :}$$

$$r = 6\,720\,000^{m} = 1680 \text{ lieues.}$$

On trouve une dernière preuve de la rondeur de la Terre dans les Eclipses de lune : d'autant plus que ces Eclipses se produisent pour des parties différentes de la Terre, et durent quelques heures, pendant lesquelles la Terre tourne.

à deux lieues en Ballon (Gay-Lussac) on aperçoit $\frac{1}{1600}$ de la surface de la Terre.

Au sommet de l'Etna et de Teneriffe, c.à.d. à 10500 pieds, on en voit $\frac{1}{4000}$

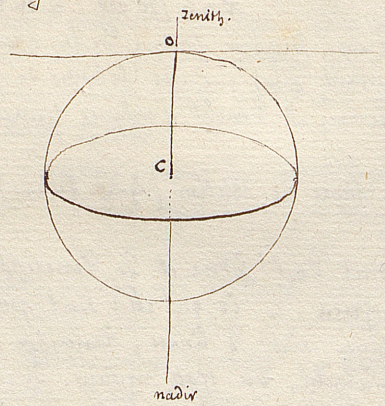
48. Montagnes. — Ce qu'elles sont par rapport au Rayon : les pics de l'Himalaya ont 2 lieues, Teneriffe, 1 lieue. — Si l'on faisait une Terre de 3^{m} de diamètre, ou 1500 millim. de Rayon, Teneriffe aurait un millim. (au Tableau, on ne peut le voir : le trait qui figure la Sphère a plus de un millim. d'Epaisseur).

49. Quant à la profondeur des mers, encore bien qu'on ne puisse pas sonder en beaucoup d'endroits, il est très-probable que l'abaissement moyen n'est pas d'une lieue. — Dépression qui en résulte sur la Sphère précédente. Si, avec un pinceau imbibé d'eau, on venait à imbiber cette Sphère, on aurait relativement une Epaisseur plus grande.

5e. Leçon.

50. Comme nous ne nous occupons de la Terre que préalablement, et pour acquérir les connaissances nécessaires à l'Etude des astres, nous la supposerons sphérique.

51. Centre et Rayon de la Terre. —



Soit en O un observateur. Traçons son Rayon. Ce Rayon prolongé vers le ciel prend le nom de Verticale. — La Situation de cette Verticale en un lieu de la Terre s'obtient par un fil à plomb: pour détruire plus rapidement les oscillations, on fait plonger la masse dans un liquide.

Si par la verticale du lieu de l'observateur, on fait passer un plan, ce plan est perpendiculaire à la surface de la Terre et est appelé un plan vertical. Il y a une infinité de plans verticaux passant par un même point de la Terre.

Si l'on suppose que cette verticale soit prolongée ... Zenith, Nadir.

52. La Terre étant sphérique, toute section plane est une circonférence: et si le plan passe par le centre, on a un Grand Cercle.

Comme toutes les circonférences, nous diviserons les Grands Cercles en Degrés ... 360°. — Quadrant. — Minutes — Secondes.

$$5400' = 1 \text{ quadrant} \qquad 21600' = 2\pi$$
$$324000'' = \text{id.} \qquad 1296000'' = 2\pi \qquad \pi = 648000''$$

Si nous supposons que ce grand cercle se relève en restant parallèle à lui-même, nous aurons une série de petits cercles décroissants. — Plan Tangent. Il est perp. à l'extrémité du Rayon CO: ce que l'on exprime en disant que Le plan tangent à la surface terrestre est perp. à la Verticale.

Le plan tangent est dit Horizontal.

De même que nous avons fixé la position de la Verticale au moyen du fil à plomb, de même nous déterminerons celle du plan horizontal par des niveaux, ou par une portion peu étendue de la surface des eaux tranquilles.

Souvent nous aurons besoin d'un plan horizontal qui réfléchisse la lumière. On se sert alors d'un bain de Hg dans une cuvette plate afin qu'elle en contienne moins (c'est naïf) : la cuvette doit être assez large pour qu'il n'y ait plus d'effets capillaires.

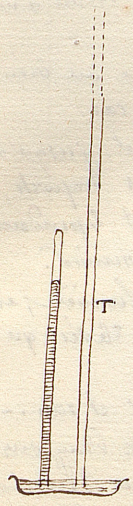
On peut aussi se servir du fil à plomb et de procédés Géométriques pour déterminer un plan horizontal : de même que le bain de mercure peut servir à fixer Géométriquement la Verticale.

Ces deux moyens sont employés dans la recherche des Longitudes, et conduisent au même résultat.

Le plan horizontal s'appelle souvent Horizon. – Le sens vulgaire de ce mot est ainsi un peu détourné, ainsi que l'a été celui du mot Géomètre.

Nous en resterons là de la Terre considérée comme Sphérique.

Maintenant, occupons-nous un peu de son Enveloppe, qui influe sur les observations astronomiques.



atmosphère.

---

53. Lorsqu'on s'élève dans l'atmosphère, la difficulté de la respiration, d'accord avec le Baromètre, montre que la quantité d'air diminue.

Rappeler le principe du Baromètre : si le tube a 1 centim. de section : si l'on considère un autre tube T de même section, plein d'air, et prolongé indéfiniment : le poids de l'air = le poids du mercure ; et ce n'est pas étonnant qu'une si petite colonne de Hg pèse autant qu'une si grande colonne d'air.

Si maintenant on s'élève : ... la colonne d'air du tube T, qui peut être supposé fixe, diminue de toute la quantité dont on monte ; donc ...
Si par ex. on s'élève à 1000 pieds, le mercure baisse de $\frac{1}{30}$ de sa hauteur, un peu plus d'1 pouce. – à 10800 pieds (Etna, Ténériffe), le Hg n'est plus qu'aux $\frac{2}{3}$ de sa première hauteur, ou 21 pouces 3 lignes : Enfin, à 18000 pieds ou 6000m, il est à 16 pouces :

0 pieds	....	32 pouces
1000		31p
10800		21p 3l.
18000		16p

En examinant ces nombres, on voit que la diminution n'est pas proportionnelle à la hauteur : – Plus on s'élève, plus il faut s'élever ensuite pour avoir une même diminution. – Cette remarque montre qu'il ne faut pas croire qu'à 30000 pieds il n'y a plus d'air.

54. La question de la hauteur de l'atmosphère est loin d'être simple. – On est parvenu, soit par l'observation des Crépuscules, soit par celle des Réfractions, soit par le calcul des densités successives, soit enfin par les lois de Refroidissement, – à cette conclusion que, à une distance de la Terre égale à $\frac{1}{60}$ du rayon, il n'y a plus d'air.

Si donc une Sphère de 1 pied de rayon, nous représente la Terre, $\frac{12 \text{ pouces}}{60} = \frac{1}{5}$ de p. serait l'Epaisseur maximum de cette couche atmosphérique.

En réalité, cette Epaisseur maximum est de 25 lieues. – Là, il n'y a plus autant d'air que le peu qui reste dans nos meilleures machines pneu-

-matiques : aucun procédé de chimie ou de physique ne pourrait en donner quelques traces.

55 Tout cela complète nos connaissances, mais complique nos observations.

Nous pouvons en effet nous représenter l'atmosphère par une série de couches sphériques d'air de même densité, chaque couche ayant par ex. 1m ou 2m d'épaisseur : seulement les densités de ces diverses couches doivent être regardées comme décroissantes. — Ceci est justifié : car on a remarqué qu'au bord de la mer, dans tous les lieux, le baromètre marque la même pression : et qu'il en est de même pour tous les points situés à une même hauteur au-dessus du niveau de la mer. — Figure. —

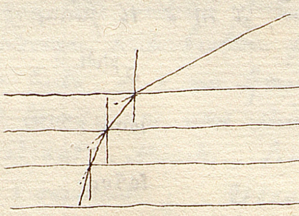
Y a-t-il, entre ces diverses couches, une limite bien tranchée, ou bien si la densité décroît insensiblement ? C'est évidemt. ce dernier cas.

Enfin, la densité décroît-elle jusqu'à zéro, ou bien seulemt. jusqu'à une certaine valeur qui forme une limite brusque ? Peu nous importe, car les phénomènes sont les mêmes dans les deux cas. — Il est cependant probable que ce second océan est nettement limité comme le premier.

Si l'on se rappelle maintenant les propriétés de la lumière, il est facile de voir que les astres nous paraîtront toujours plus élevés qu'ils ne le sont réellement.

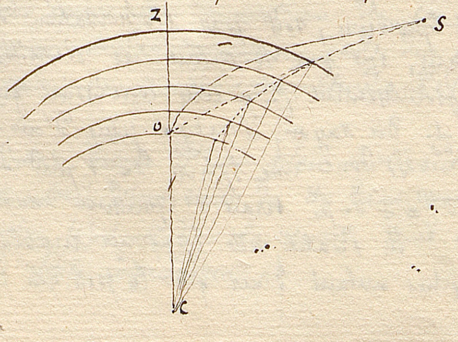
(Rappeler la propriété fondamentale de la réfraction : air et eau. — Un observateur croit toujours voir un objet dans la direction des rayons lumineux qui lui arrivent : rien ne peut prévenir qu'il y a eu déviation. Les poissons sont plus bas qu'ils ne le paraissent quand on les regarde obliquement. Ceux qui ont tiré dessus savent bien qu'il faut tirer en-dessous.)

Si nous avons deux couches d'air de densités différentes, le phénomène sera le même. En passant du milieu le moins dense dans l'autre, le rayon lumineux se rapprochera de la verticale. Prenons 3 ou 4 couches de plus en plus denses : nous aurons :



Si les couches deviennent de plus en plus minces, nous aurons une courbe continue.

Appliquons cela à la surface de la Terre. Soit C son centre, O un observateur, Z son zénith. Considérons l'atmosphère comme composée d'une série de couches de plus en plus légères et peu épaisses. — Soit S une étoile. — Le rayon qui se dirigerait vers l'observateur passerait-il par son œil ? non, évidemment.



Conséquence : les Rayons qui arrivent à l'œil sont donc des Rayons qui n'étaient pas primitivement dirigés vers l'observateur, mais qui, en partant de S, ont pris une route oblique plus élevée.

Suivant quelle direction le Rayon paraît-il à l'observateur ? Rappelons-nous ce qui a été dit : l'observat.r n'a que la conscience de l'Impression, et ne peut juger de ce qui arrive auparavant au Rayon Lumineux. Il verra donc les astres plus rapprochés du zénith, dans la direction de la tangente au dernier Élément de la courbe.

(Inutile de dire que les dimensions de la fig. sont outrées, et que la différence de direction est bien moindre)

56. Voyons maintenant l'influence de cette Cause d'Erreur.

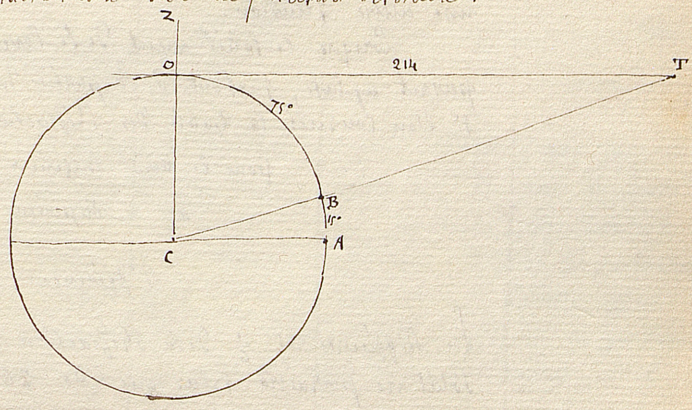
Déf. Distance Zénithale angulaire d'un astre : – vraie et apparente.

La distance zénithale apparente est plus petite que la vraie.

Mais de combien ?

C'est là un problème difficile, et dont la solution réclame la connaissance précise de la constitution de l'atmosphère, avec toutes les ressources du Calcul. – C'est une matière à problèmes qui n'est pas encore épuisée.

Sans donner de théorie, voici une construction qui, pour toutes les hauteurs, donnera la réfraction avec toute la précision désirable :



Soit o l'observateur, Z son zénith. Menons la tangente OT jusqu'à la rencontre T avec le Rayon CB tel que AB = 15°. – Je divise OT en 214 parties égales, de O à T : si l'on s'arrange de façon que OT = 214^{mm} la division se fera tout de suite. – Pour savoir, quand on observe un astre, de combien de secondes il est trop près du zénith, on lit sa distance zénithale au bout du rayon qui la représenterait, prolongé jusqu'en OT : si on lit 25, c'est qu'il faut augmenter la dist. zen. de 25".

Cette construction est exacte jusqu'à 75°. – au-delà, le problème devient effrayant de complication. – Quand on approche de l'horizon, la loi n'est plus du tout applicable.

à 45°, répond une correction de 59", presque une minute. or, une minute en astronomie, c'est un monstre (!!) : les astronomes se disputent pour des secondes.

à 75°, la correction est de 214".

au zénith, zéro. à 90°, elle est de 33',46"

57. De là une conséquence importante relative au lever et au coucher des astres : ils paraissent relevés : – on les voit encore quand ils sont déjà au-dessous de l'horizon.

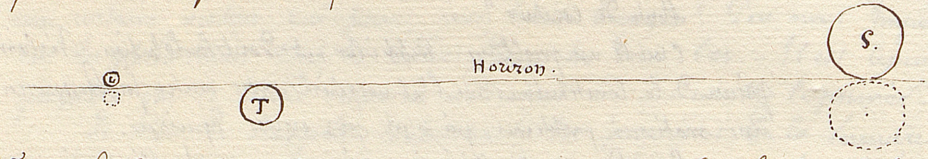
Cela s'applique au Soleil comme aux Étoiles ; comme, à l'horizon, la

Réfraction est de 33' 26", et que le Diamètre apparent du Soleil n'atteint jamais 33', son disque est déjà descendu au-dessous de l'Horizon, alors que son bord inférieur nous paraît lui être tangent. — Il en est de même pour la Lune.

L'inverse a lieu pour le lever des astres.

Le phénomène des Réfractions allonge donc la durée du jour, car les deux causes s'ajoutent.

58. On trouve aussi là l'explication d'un phénomène curieux. — Les éclipses de Lune ont lieu lorsque la Terre se trouve entre la Lune et le Soleil. Cependant, quelquefois on observe une éclipse de Lune lorsque le Soleil est sur le point de se coucher, la Lune étant totalement levée. Or ces deux positions, marquées en trait plein sur la figure, ne sont qu'apparentes; ce sont les positions pointillées qui ont lieu en réalité:

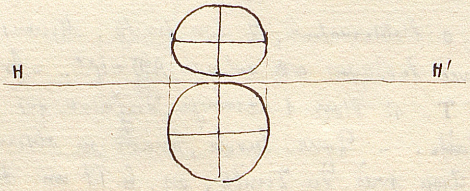


59. La Réfraction produit encore, dans les apparences du Soleil et de la Lune, une autre illusion.

Lorsque le Soleil vient de se lever ou est sur le point de se coucher, il paraît aplati, surtout à sa partie inférieure. — Cela est facile à expliquer si l'on consulte la Table des Réfractions: la Réfraction est:

pour le bord	inférieur	33' 46"
" "	supérieur	28' 14"
	Différence	5' 32"

La différence est $\frac{1}{6}$ de la Réfraction totale: donc le Diamètre vertical du Soleil ne paraîtra plus que de $26'\frac{1}{2}$:



au contraire, le Diamètre horizontal reste constant. — Donc....

60. La présence de l'atmosphère, si elle allonge la durée du jour par Réfraction, l'allonge bien davantage encore par Réflexion.

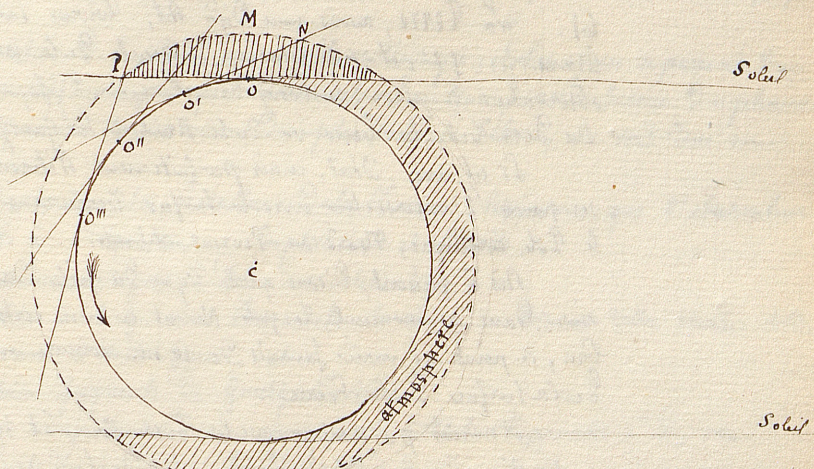
Le premier allongem^t. n'est que de quelques minutes, le second est de plusieurs heures.

Pour s'en rendre compte, il faut remarquer qu'un centre lumineux n'éclaire pas seulement les corps qui sont juste en face de lui. — Cela tient à ce que, sur les objets qui reçoivent directement les rayons, une Réflexion partielle a lieu, et la lumière qui en provient éclaire d'autres objets, sur lesquels une nouvelle Réflexion se produit. — Si l'on est entouré de murailles blanches, on y voit davantage: si elles sont noires, il n'arrive presque plus de lumière.

La lumière se réfléchit donc irrégulièrement sur les molécules d'air, et

fait même que l'on peut voir la couleur de l'air quand il est en grande masse. Si l'on s'élève en ballon de manière que la portion d'air diminue, le ciel devient de plus en plus noir, parce que la quantité de lumière bleue réfléchie irrégulièrement décroît. — Si cette couche était nulle, on verrait le ciel tout noir, excepté dans la direction même des rayons lumineux qui arrivent des astres.

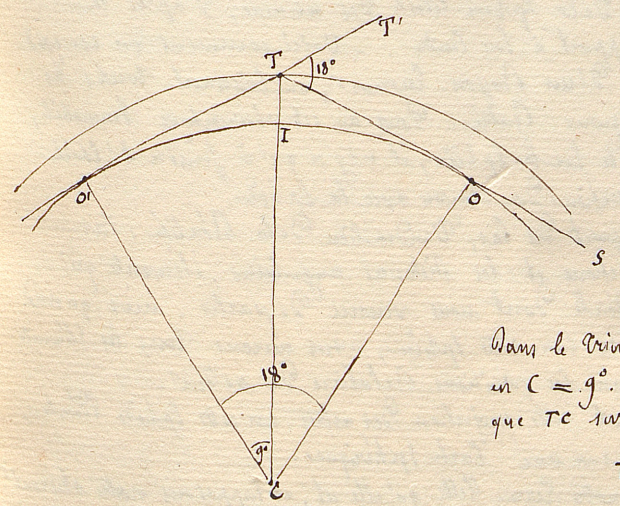
C'est de la réflexion atmosphérique que provient le crépuscule.



Soit un observateur placé en O lorsque le Soleil est en S. Il est éclairé par la lumière directe, et par la lumière réfléchie provenant de tout le segm.t OM de l'atmosphère. — au bout de quelque temps, en vertu de la rotation de la Terre, l'observateur arrive en O'. Menons l'horizon: le Soleil est au-dessous, en sorte que, sans air, on serait dans l'ombre: mais on est éclairé par une portion MNP du segment éclairé de l'atmosphère. — En O'', la portion éclairante diminue encore: enfin, en O''', le crépuscule est terminé, et il fait nuit close.

C'est ce phénomène qui, dans nos climats, dure plus d'une heure le matin, et autant le soir, qu'on appelle aurore et crépuscule. — à l'Équateur, il dure moins longtemps.

Ce phénomène peut donner une idée de la hauteur de l'atmosphère.



Traçons la limite extérieure de la partie sensible de l'atmosphère. Soit SO un rayon du Soleil tang.t à la Terre pour un observateur placé en O; O' la nouvelle position de celui-ci lors de la fin du crépuscule. — On a trouvé que, tant que le Soleil est à moins de 18° au-dessous de l'horizon, le crépuscule persiste: à 18°, il finit. Donc, lorsque $T'TO = 18°$, le nouvel horizon passe par l'intersection du premier avec la limite de l'atmosphère.

Dans le triangle $TO'C$, on connaît $O'C = 1500$ lieues, et l'angle en $C = 9°$. On en conclut aisément (calcul ou construction géom.) que TC surpasse $O'C$ de $\frac{13}{100}$ de $O'C$. Donc

$$TI = \frac{13}{100} \cdot 1500 = 19 \text{ à } 20 \text{ lieues.}$$

à cette hauteur, l'air est tellement ténu que sa présence ne peut plus être manifestée par le phénomène du crépuscule et de l'aurore.

Nous en resterons là de ces notions générales, et nous allons étudier d'autres phénomènes célestes. — La Terre sera supposée sphérique.

---

61. La Terre, avons-nous déjà dit, tourne sur elle-même autour d'un de ses diamètres PP', et cette rotation s'exécute de la manière suivante : — Si un observateur se place le long de cet axe de façon qu'il ait le pôle arctique au-dessus de sa tête, la Terre va de sa droite à sa gauche.

Si cet axe, idéal, mais parfaitement déterminé, est mené dans la Terre, ses points d'intersection avec la surface terrestre s'appellent Pôles. — L'un est le Pôle arctique, Nord ou Boréal, l'autre..

Dès à présent, disons que la ligne des pôles dans la Terre est parfaitement fixe ainsi, dans ce moment, le pôle N. est en un certain point des mers boréales ; eh bien, ce point ne varie jamais de 10 m. comme on le démontre par l'observation de la surface de la Terre.

Il aurait pu arriver que la Terre tournât successivement autour de ses différents diamètres : celui de Paris, celui de Londres, etc. (Théories géologiques qui s'appuient sur cette hypothèse que la rotation autour de différents axes a eu lieu : elles sont toutes gratuites, et rien ne vient à l'appui.)

Equateur. — Petits cercles. —

62. Voyons si cette rotation de la Terre explique bien tous les phénomènes que nous voyons.

Soient des étoiles dans le ciel, et un observateur placé au centre de la Terre, ayant la faculté de se tourner de tous les côtés, et de tout voir autour de lui. alors, il verrait toutes les étoiles, qui lui paraîtraient immobiles les unes par rapport aux autres : car, les déplacements relatifs des étoiles étant très-lents à se produire, c'est un phénomène subséquent dont nous faisons provisoirement abstraction.

De plus, dans l'impossibilité où il se trouve de juger des distances, il sera naturellement conduit à supposer toutes les étoiles également éloignées. C'est delà qu'est venue l'idée de la sphère céleste des anciens, d'après la propriété de la sphère par rapport à son centre. — Voici comment on conçoit cette sphère. — On la suppose d'un rayon énorme, embrassant toutes les étoiles, et ayant l'observateur pour centre. Pour cet observateur immobile, pour avoir la position de l'étoile sur la sphère, il n'y a qu'à joindre l'étoile à son œil, et à prendre l'intersection du rayon avec la sphère.

Cette sphère, dans la plupart des cas, tiendra lieu de la réalité : car l'observateur ne voit que les directions et les distances angulaires, éléments qui sont conservés sur la sphère idéale dont nous venons de parler. ainsi, quand nous aurons rapporté 3 étoiles sur cette sphère, nous aurons tous les éléments que nous pourrons considérer dans les positions relatives des astres.

C'est ainsi qu'en continuant cette projection des astres sur cette sphère idéale, nous aurons le spectacle du ciel sur une carte sphérique.

63. Rétablissons maintenant notre Terre telle qu'elle est, et supposons notre observat.

placé dessus, et non dans le vide comme tout-à-l'heure.

Si la Terre est immobile et ne tourne pas, le spectacle sera le même pour lui, à cette exception près que la Terre lui en cachera une partie.

Si donc la Terre restait fixe, nous ne connaîtrions qu'une partie des astres, et, pour les voir tous, nous serions obligés d'entreprendre un voyage. À mesure que nous cheminerions, nous découvririons de nouvelles Etoiles, et nous laisserions derrière nous les anciennes. — C'est la même chose que si l'on se trouve à demi-chemin d'une montagne élevée: il faut en faire le tour pour voir tout le pays environnant.

La Rotation de la Terre nous évite ce voyage, et les choses se passent de même, à cette différence près que l'observateur, au lieu d'avoir besoin de plusieurs années pour prendre connaissance des phénomènes célestes, les voit tous en quelques heures.

Rétablissons donc la Rotation de la Terre. — Supposons que l'observateur soit immobile à l'Equateur. — Explications et détails. —

Phénomènes analogues à dans nos climats;

Si ce soir à 8 h. vous regardez le ciel, ... telles et telles Etoiles: telles autres se lèveront à telle heure .. etc.

Les Etoiles gagnent de gauche à droite.

Comme en général on est assez porté à tout rapporter à soi, on croit que ce sont les Etoiles qui se déplacent: dans un bateau qui marche sans secousses, on croit que la Terre marche:

..aufugimus portu, Terræque urbesque recedunt.

Ce n'est qu'une apparence:

Placez-vous au N. d'un Edifice, tour etc, tournez-vous vers le Sud, regardez une Etoile, de façon que l'Edif. soit entre elle et vous. Saisissez le moment où elle disparaît derrière la voûte de l'arête de l'Edifice, en marchant dans un sens: marchez en sens contraire, elle reparaîtra.

6e. Leçon.

64. Le mouvement de Rotation de la Terre autour de son axe, l'astronomie physique prouve qu'il n'a pas varié. – La durée de la Rotation n'a pas changé non plus:

Comment a-t-on pu le Reconnaître?

Nous pouvons bien, à l'aide d'une bonne pendule, voir si, pendant plusieurs jours, le mouvement de Rotation est le même. – Mais il est impossible de le constater ainsi pendant des siècles. – Mais la Lune est une horloge éternelle qui nous servira à cette Constatation. – Nous en reparlerons plus tard.

Horloges. – Lunettes.

65. Pour fixer les directions avec une grande précision, on se sert de Lunettes. Les anciens se servaient d'alidades. – Pinnules. –

Mais les trous sont beaucoup trop grands pour que l'observation soit précise. – En outre, avec les yeux, on ne peut pas distinguer l'une de l'autre deux directions qui font un angle de quelques minutes.

De là l'emploi des Lunettes.

Objectif. – Propriétés des Lentilles. – achromatisme. Newton le crut impossible. Euler le crut possible, mais se trompa dans ses calculs. Dollond fit des verres achromatiques. –

On sait de plus qu'en aidant la vue d'un microscope, on peut étudier plus facilement les petits objets. Or, avec un simple verre bi-convexe, on a un microscope: – le microscope des naturalistes est une simple goutte d'Eau.

Rien n'empêche donc d'observer l'image des objets avec un microscope: Oculaire.

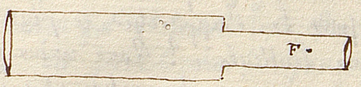
Ainsi, dans la Lunette astronomique, l'objectif a pour but d'approcher de nous des objets situés à l'Infini, et avec l'oculaire, on examine l'Image. Sans l'oculaire, on ne gagnerait rien: on aurait la même chose que dans une chambre noire. – Néanmoins, les passages de Vénus et de Mercure sur le Soleil ont été observés sans oculaire. On faisait tomber les Rayons Solaires sur un Ecran dans une chambre obscure. Le premier passage de Mercure observé le fut ainsi, en 1631, par Gassendi, au Collège de France: on voyait un petit point noir traverser lentement le disque du Soleil.

Plus l'objectif est grand, plus il reçoit de rayons Lumineux, et plus on peut amplifier l'image avec une loupe sans que les détails cessent d'être perceptibles, faute d'être éclairés.

La Lunette astronomique Renverse les objets. avec d'autres verres, on pourrait les Redresser, mais on s'en garde bien. On y arriverait aux dépens de la quantité de Lumière, et c'est cette lumière qu'il faut conserver avec soin. – L'image est vue renversée, mais avec un peu d'habitude, on s'y reconnaît: L'important est de bien voir et de bien pouvoir fixer les

position d'une ligne.

Lorsqu'on dirige vers le ciel une semblable Lunette, pourvue d'un



objectif et d'un oculaire, dont le foyer commun est en F, on n'aperçoit pas seulement un point, mais un certain Espace du Ciel, espace qui diminue à mesure que le Grossissement augmente : – Champ.

Si la Lunette est fixe et dirigée vers le Sud, on voit les Etoiles y apparaître vers la droite et disparaître à Gauche. Cependant, tel n'est pas le sens de leur mouvement : mais les lunettes renversent. – Histoire d'un Journaliste qui prétendait voir les Satellites de Jupiter à la vue simple : on s'aperçut qu'il blaguait (sic), et qu'il avait appris leur position dans la Connaissance des Temps : car, dans l'explication de ce qu'il prétendait voir, il parlait de ce qu'on apercevrait dans une Lunette : il oubliait qu'elle Renverse. –

Pour fixer la position d'une Etoile dans le champ d'une Lunette, au foyer commun de l'objectif et de l'oculaire on tend deux fils très-fins, (autrefois, des fils d'araignée, maintenant, des fils de platine). Ces deux fils apparaissent en noir sur le fond du Ciel qui est blanc : et leur point de croisement détermine l'axe de la Lunette : parce que c'est un point fixe qu'on peut toujours retrouver à volonté : de sorte que, si une Etoile y passe aujourd'hui, elle y repassera demain, et nous sommes sûrs qu'alors l'Etoile sera rigoureusement, dans la même position que la veille, pourvu que la Lunette n'ait pas remué. – avec des Lunettes parfaitement établies, on est sûr, au bout d'un mois, au bout de 6 mois, de pouvoir retrouver la même direction, à moins de 0",1 d'arc.

Les deux fils ne sont bien clairs que si le Réticule est au foyer de l'oculaire : ils ne sont invariables que s'il est au foyer de l'objectif. – On voit donc ainsi que ces deux foyers doivent coïncider.

66. Un autre Instrument indispensable pour observer, c'est une Horloge.

Clepsydre des anciens : c'était pour mesurer le temps pendant lequel parlaient les avocats. – On peut arriver par l'Ecoulement du mercure à diviser avec une grande précision un petit intervalle de temps.

Nous ne décrirons les Montres et Chronomètres qu'à l'occasion du problème des Longitudes.

C'est le Pendule qui est la source de toute précision en Astronomie pour la mesure du Temps.

Galilée observa que :

Si les oscillations du pendule ne sont pas très-étendues, peu importe pour leur durée que l'amplitude change un peu.

Cette Remarque est importante : car la Résistance de l'air ne permet pas au pendule de garder toujours la même amplitude d'oscillation. – Dès lors le pendule peut être employé pour mesurer le Temps. Car, si pour 12 oscillations il faut un certain temps, pour 24 il faudra un temps double, pour 36, un temps triple, etc. Donc

La durée d'un phénomène quelconque est proportionnelle au nombre des oscilla-

-tions d'un même pendule effectuées pendant son accomplissement.

Balancier. – Sa description. – Masse lenticulaire que l'on suspend en un point tel de la verge que... Cette masse doit être considérable par rapport à la verge, pour se rapprocher le plus possible du pendule idéal. – Pourquoi cette forme lenticulaire ? Pour mieux fendre l'air. – Une vis est à l'extrémité de façon que l'on puisse remonter plus ou moins la lentille.

Une demi-oscillation se passe en 1'' de temps.

Compensation à grille. Mauvaise.

Quelques mots seulement sur les pièces qui accompagnent le Balancier dans les horloges :

D'abord : Suspension à couteau.

Ensuite : – Si l'on pouvait avoir, dans le vide, un pendule idéal, il marcherait indéfiniment. Mais il n'en est pas de même pour les pendules ordinaires : il y a des frottements qui finissent par éteindre les oscillations du pendule le mieux disposé.

Outre l'inconvénient qu'on aurait à ne pouvoir ainsi mesurer le temps que 4 ou 5 heures, il y en aurait un autre : la découverte de Galilée n'est qu'approchée : pour dire la vérité, il faut s'énoncer ainsi : Pour de petites différences d'amplitude, il y a de bien plus petites différences de durée. Mais, si l'on arrive à de grandes différences d'amplitude, les différences de durées, bien que plus petites, ne sont pas négligeables.

Il faut donc combiner la découverte de Galilée avec un mécanisme qui restitue au pendule une partie de la vitesse qu'il perd, et si alors les oscillations ont même amplitude, leur durée sera rigoureusement constante.

Ancre. – Echappement. – Rouages. –

---

67. Comment se servir de ces instruments pour constater que la durée de la rotation de la sphère céleste reste constante ?

Si, un soir, vous dirigez une lunette vers une étoile de manière qu'elle disparaisse derrière le point de croisée : fixez votre lunette, et laissez-la. Le lendemain, à la même heure, venez regarder. Vous ne tarderez pas à voir l'étoile entrer par la droite et passer au point de croisée. Ce retour se fait exactement pourvu que la réfraction n'ait pas changé : plus la température est élevée, plus la réfraction est petite : plus le baromètre est haut, plus elle est grande : de façon que pour une même hauteur zénithale, la réfraction n'est pas invariable : elle ne l'est que si la température et la hauteur barom. restent constantes. – Deux jours, trois jours... après, vous retrouvez votre étoile à la même place : ce qui montre que l'axe de rotation de la sphère n'a pas changé de position.

De plus, supposons que la pendule marque, au moment du passage, les heures suivantes

1er jour	$7^h\ 8^m\ 15^s,2$
2e "	$7^h\ 8^m\ 15^s,6$
3e "	$7^h\ 8^m\ 16''$

on voit que

1ère différence = 2e différence = $24^h\ 0^m\ 0^s,4$.

Cela a lieu pour toutes les Etoiles, et Rigoureusement.

Conséquence :

Le mouvement de la Sphère Céleste est Régulier et Uniforme.

68. Cet intervalle de temps qui s'écoule entre deux Retours consécutifs d'une Etoile au même point du Ciel porte le nom de Jour Sidéral. — Heures, minutes et Secondes Sidérales.

Si une horloge est Réglée sur les Etoiles, elle doit parcourir 24h. en un jour sidéral. — La précédente avance de 0s,4. Pour la Régler, on allonge le pendule. Mais, dans les observatoires, quand on a une pendule qui n'avance que de 0s,4, on se garde bien d'y toucher; car le plus petit mouvement la ferait retarder d'une ou deux Secondes. — Dans la vie civile, une avance de 0s,4 importe peu; dans les observatoires, on préfère corriger les observations, car on ne peut négliger ces petites différences.

69. Lors donc qu'on est sûr, au point de vue Philosophique, de l'uniformité du mouvement de la Terre, on renverse le problème, et l'on se sert des Etoiles pour Régler la pendule.

Voici comment on opère.

On observe plusieurs jours de suite le passage d'une même Etoile à la croisée des fils, et, à ce moment précis, on note l'heure. — Si, pour 4 jours, on a les différences suivantes :

24h	0m	0s,4
24h	0m	2,6
24	0	0,1

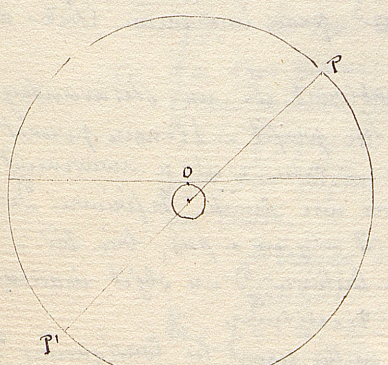
la pendule serait à Régler; elle ne marcherait pas uniformément.

Mais lorsqu'on en a une dont la marche est uniforme, on la Règle facilement. Au moyen d'une bonne horloge, on peut Répondre de 0s,01 de temps.

---

aspect du Ciel à Paris.

70.



Traçons le Globe Terrestre. Soit Paris en O. Si je mène le Plan tangent, j'ai l'horizon. Autour de quelle ligne tourne la Terre ? — L'axe de Rotation est tellement placé que Paris est entre le Pôle et l'Equateur, à peu-près au milieu. La Terre, pour un observateur placé dans la position Voulue, tourne de Droite à Gauche; donc le ciel semble tourner de Gauche à Droite. — Comme il s'agit des apparences, supposons que ce soit la Sphère Céleste qui tourne autour de PP'. — Pôles Célestes. — Quelle est la 1re conséquence ? C'est que P (Nord, Boréal, arctique) doit paraître immobile; de même P' (Sud, austral, antarctique). Au contraire, les Etoiles qui ne sont pas situées au Pôle paraissent décrire des cercles. — Ces circonférences sont d'autant plus petites qu'elles sont plus Rapprochées du pôle. — Une Etoile de l'Equateur décrit le plus grand cercle. — Toutes ces circf. sont décrites en 24 h.

71. Voilà le Spectacle que nous aurions si la Sphère était Transparente. Mais, comme il n'en est Rien, les apparences sont différentes. — P est perpé-

-tuellement visible : P', toujours invisible : ce n'est qu'en dépassant l'Equateur qu'on peut voir P'.

Toutes les Etoiles qui décrivent des cercles assez petits pour ne pas s'abaisser au-dessous de l'horizon sont toujours visibles : cercle de perpétuelle apparition.

Toutes les Etoiles qui sont situées près du pôle austral, et assez près pour ne pas atteindre l'horizon sont invisibles : cercle de perpétuelle occultation.

On ne peut connaître ces Etoiles que par des voyages.

Un des premiers astronomes qui firent ces voyages fut Halley, un des amis de Newton. En 1677, il alla observer à St. Hélène. - En 1751-1753, Lacaille alla au cap de Bonne-Espérance, et y dressa le catalogue de 10000 Etoiles.

Herschell alla aussi au même endroit.

Il y a là un magnifique observatoire, qui va être muni d'instruments supérieurs à ceux que l'on possède, et avec lesquels on va explorer les richesses du ciel austral.

Les Etoiles qui ne sont pas dans le cercle de perpétuelle occultation, mais très près, ne sont visibles que peu d'heures : telles sont Fomalhaut et les Etoiles du Scorpion.

Divers aspects des autres Etoiles.

Les Etoiles équatoriales sont visibles presque pendant 12 h. - Plus tard, nous apprendrons à calculer leur lever et coucher.

72. Indiquons ce qu'il y a à faire pour vérifier cela expérimentalement.

On regarde l'endroit du ciel où le Soleil se trouve à Midi. - on a le Sud. - On se retourne. - Voulez-vous avoir le pôle ? Il faut chercher la constellation de la Grande Ourse qui est toujours sur l'horizon, et toujours visible quand il fait nuit. - Grande ourse. - Pôle. - Petite ourse. -

Pour continuer les observations des Etoiles pendant le jour, il faut se servir de lunettes assez puissantes : même alors, on les voit mieux que la nuit, plus nettement : les observations de jour valent mieux que celles de nuit. C'est une chose très délicate de savoir pourquoi l'on voit si bien les Etoiles dans les lunettes. - On les voit aussi dans les puits de mine, et même avec des tuyaux plus étroits. Un opticien célèbre racontait qu'il avait été conduit à ces études par ce fait qu'en se chauffant en hiver, il voyait toujours à la même heure du jour passer une même Etoile au-dessus de sa cheminée.

73. Le mouvement de la Terre, qui semblerait être un désavantage pour l'astronomie, tourne au contraire à son profit. Il nous permet de faire des opérations impossibles sans cela : - ainsi, c'est ce mouvement de ~~translation~~ qui nous a permettre de trouver une limite inférieure de la distance des Etoiles à la Terre : en-deçà, il n'y en a pas, bien sûr.

Construction connue pour trouver la distance d'un objet inaccessible. Emploi de la trigonométrie pour plus d'exactitude.

Quand les objets sont très éloignés, quelles seront les conséquences de cette construction ?

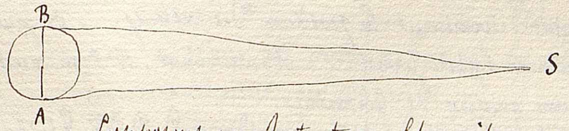
Th. - L'arc d'une seconde = le rayon : 206265.

Ainsi, lorsqu'on observe un objet sphérique sous un angle de 1'', il est à une distance 206265 fois plus grande que ses dimensions. Ainsi, voici une sphère de 1m. de diam. De combien faudrait-il s'en éloigner pour la voir sous un angle de 1'' ? De 206265 m. = 51 lieues !! - Pour la voir sous un

sous un angle de 0",1 il faudrait se placer encore 10 fois plus loin. — ainsi la mesure des angles quand on connaîtra les dimensions de l'objet pourra servir à mesurer leur distance.

Imaginons maintenant un observateur placé à l'Equateur. Il aperçoit une étoile en S. S'il ne changeait pas de position, il la verrait toujours à la même place: il saurait bien la direction, mais il ne pourrait avoir aucune notion sur la distance.

Mais la Terre tourne: l'observateur va venir de A en B. — Il peut alors considérer le diam. de la Terre comme une base de longueur connue.



Rien ne s'oppose à ce qu'il mesure les angles A et B, qui sont les suppléments des distances zénithales. On a $S = 180 - (A+B)$.

Supposons un instant qu'on ait:

$$A = 88° \; 59' \; 25'',8$$
$$B = 91° \; 0' \; 33'',2$$
$$A+B = 179° \; 59' \; 59''$$

d'où

$$S = 1''$$

La distance serait 2×206265 fois le rayon de la Terre, qui est 1500 lieues: ou 206265×3000 lieues.

Or, en faisant l'opération, on trouve $S = 0$ avec toute la précision possible. — Donc la distance est beaucoup plus grande. — Et pourtant, si l'on avait seulement $S = 0'',1$ on le constaterait. Ainsi, une limite inférieure de la distance est

$$3000 \times 206265 \times 10 \text{ lieues.}$$

on peut l'exprimer autrement et mieux. — Quand nous ferons la même opération pour le soleil, nous trouverons que l'angle sous lequel du soleil on voit la terre est 17",2 ou 172 fois 0",1. Donc les étoiles sont au moins 172 fois plus éloignées que le soleil. — Ce résultat, qui nous paraît si considérable, est de beaucoup inférieur à la réalité.

73. La Terre est donc une sphère enveloppée d'une sphère céleste idéale que l'on forme en projetant dessus les étoiles. — Mais il faut définir d'une manière très-nette la position des étoiles sur cette sphère. — Les progrès de la Géographie sont liés essentiellement à ceux de l'astronomie: en sorte que, pour bien définir la position d'un lieu, il faut connaître parfaitement celle des étoiles.

Méridien d'un point, de Paris par ex.

Latitude. — Celle de Paris = 48° 50' 14". — Latitude boréale et australe.

Ex: $L = +30°$, $= -30°$.

Situation de 2 lieux l'un par rapport à l'autre:

Long. de St. Pétersb. = 27° 58' 30"
Lat. = 59° 56' 23"

avec ces données, on peut construire les deux villes sur un globe.

Globes terrestres.

Sur les cartes, on fait de même; mais il y a de plus un problème de perspective.

7e. Leçon.

74. Tout ce que nous venons de dire de la Sphère Terrestre, nous pouvons le répéter pour la Sphère Céleste.

Si par l'axe de la Sphère Céleste on fait passer un plan, il la coupe suivant un méridien Céleste.

Le plan de l'Equateur Céleste est le même que celui de l'Eq. Terrestre.

Ascension droite et Déclinaison.

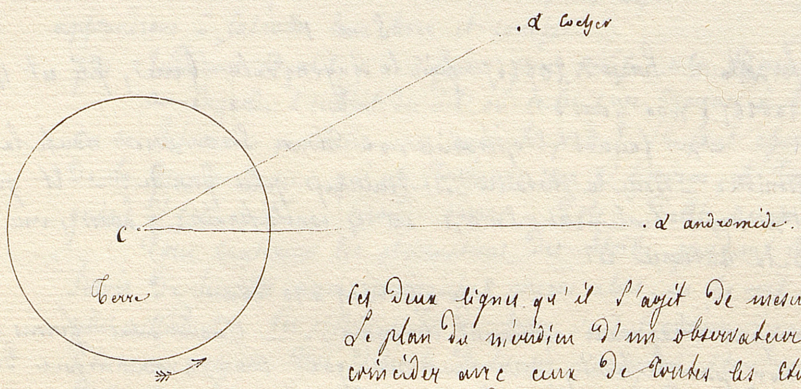
Ces deux coordonnées déterminent la position des astres. — On peut construire une Sphère Céleste comme une Sphère Terrestre. — Maintenant, si l'on veut faire des cartes, cela revient à une question de Géométrie.

75. Comment déterminer l'angle des méridiens de deux Etoiles?

On peut se servir pour cela du mouvement de Rotation de la Terre et des Horloges.

Prenons α d'Andromède, et α du Cocher ou la Chèvre.

Traçons l'Equateur Terrestre: son axe est perpendiculaire au papier.



Le méridien d'α d'Andromède est un plan perp. au papier et passant par l'étoile: on en voit la trace. De même pour α du Cocher. C'est l'angle de ces deux lignes qu'il s'agit de mesurer.

Le plan du méridien d'un observateur vient successivement coïncider avec ceux de toutes les étoiles.

Remarquez donc que, puisque la Terre tourne en 24h. rien n'est plus facile que de déduire l'angle cherché des deux méridiens de l'intervalle de temps qu'il a fallu pour que le plan du méridien Terrestre prenne successivement les deux positions.

En 24h. le méridien terrestre parcourt 360°.

En 1h. 360°:24 ou 15°

1m. 15°:60 ou 15'

1s. 15':60 ou 15''

Si l'intervalle de temps est

5h. 3m 7s

l'angle est donc

75° 46' 45''

Ce procédé suppose que l'on puisse déterminer avec précision deux choses: 1°. l'instant physique où le passage a lieu; 2° l'heure indiquée par la Pendule à cet instant. — Lunette méridienne, due à Roemer.

Comme il est aussi exact de donner le temps que les angles, on ne se donne pas la peine de transformer en degrés, mais on donne les résultats en heures, minutes et secondes de temps. — Voici un extrait des registres de Maskelyne:

année 1800 — août, 7.

α d'Andromède —	23^h	58^m	$33^s,74$
Chèvre	5	2	24,63
Sirius	6.	36	47,70
Arcturus	14	7	1,60
Antarès	16	17	20,04

en retranchant, on aura les différences d'Æ en temps.

D'après cela, on peut construire les méridiens de ces étoiles sur une carte ou sur un globe.

Ces observations ne sont pas affectées de la réfraction.

Mais il y en a une autre, lorsque la pendule avance ou retarde un peu. — Pour le voir, on prend les observations du 8 août ; et l'on corrige convenablement les premières.

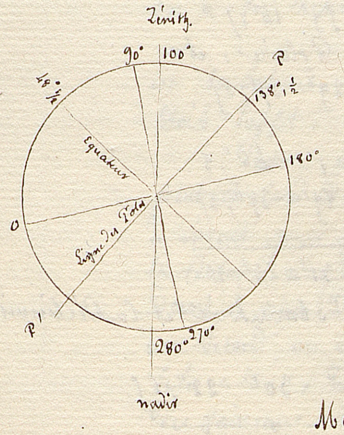
76. Détermination de la déclinaison.

Du même coup, nous déterminerons la latitude du lieu de l'observation ; car ces deux déterminations sont liées complètement l'une à l'autre.

L'instrument dont on se sert n'est autre chose qu'un grand cercle qu'on place dans le plan méridien. Il est divisé en degrés et fractions de degrés. On peut lire, avec des verniers et des microscopes, jusqu'aux secondes et fractions de secondes. Une lunette est mobile sur le cercle fixe (cercle mural).

Il y a deux problèmes à résoudre :
à quelle division correspond le vernier sur le limbe,
1°. quand la lunette est verticale ;
2°. quand elle est dirigée vers le pôle.

1°. Pour déterminer le zénith, que rien ne caractérise, on renverse la lunette, de manière à viser le nadir : au-dessous, on met une cuvette à mercure. On a en général 2 images du réticule, tant que la lunette n'est pas verticale. — à l'aide de vis, on les amène à se confondre. — Si l'on trouve qu'alors, la division du cercle est 980°, c'est donc à 100° qu'aboutit la ligne de foi de la lunette lorsqu'on vise le zénith.



2°. — Quant à la ligne des pôles : elle est située quelque part dans le méridien : c'est ce quelque part qu'il faut déterminer. — Pour cela, prenons une étoile circumpolaire, à ses deux passages, supérieur et inférieur, elle se trouve à égale distance du pôle. Si donc nous dirigeons la lunette vers l'étoile à son passage supérieur, puis à son pass. inf. et que nous prenions la moyenne, nous aurons la direction du pôle.

Ex.

Mai, 20 :	Pass. sup. de la Polaire	137°
	inf.	140°
	Direction de la ligne des pôles, aboutit à	138° ½
	Zénith Equateur "	48° ½

Distance du zénith à l'Equateur = 100 − 48 ½ = 51 ½

Si donc une étoile passe à 94° ½ sa déclinaison est 46°. —

Je pourrai maintenant avoir exactement la position des astres sur les cartes.

Ici, le phénomène de la réfraction agit.

77. Dans les observatoires, où l'on rassemble tous les moyens de contrôle possibles, on emploie un autre procédé pour trouver le point du cercle mural auquel

correspond le Zénith: en déterminant avec une grande précision le point de l'horizon du cercle. _ Pour cela, lorsqu'on aperçoit une étoile dans la lunette, on fait aussitôt une autre observation de la manière suivante: on place du côté de l'étoile un bassin de Mercure sur lequel les rayons venant de l'étoile se réfléchissent. Si je déplace la lunette de façon à recevoir ces rayons réfléchis, il est facile de voir que la bissectrice de l'angle des deux positions de la lunette est horizontale. Si ces deux positions sont 180° et 200°, l'horizon sera à 190° et le Nad Zénith à 100°.

On peut déterminer l'autre bout de l'horizon avec de nouvelles étoiles, ce qui fait 3 moyens dont il ne faut négliger aucun, car le zénith est un point capital.

78. Bessel qui a fait des observations du zénith et de l'horizon avec un grand soin à Königsberg a cru entrevoir de légers changements dans la latitude. Mais il n'y a pas lieu de les regarder comme réels: ce sont des erreurs instrumentales. Les mêmes observations faites à Greenwich n'ont pas indiqué de variations. ainsi on a deux lieux dont la latitude ne varie pas: on en conclut qu'il en est de même dans tous les lieux de la Terre, donc la ligne des pôles est fixe.

79. Reprenons les observations précédentes (faites à Greenwich).

20 Mai. Polaire. Pass. Inf. 140° 0' 13",4

Sup 137° 1' 4",3

Mais la réfraction agit. _ La distance zénithale de l'étoile étant approximativement 40° 0' et 37° 1' les réfractions sont 48",1 et 42",5.

donc les véritables positions sont

P. Inf. 140° 1' 1",5

P. S. 137° 1' 46",8

dont la moyenne est la vraie position du Pôle: _ or la différence

2° 59' 14",7

est le diamètre du petit cercle décrit par la Polaire: et

1° 29' 37",35

est la distance de la Polaire au pôle.

137° 1' 46",8

\+ 1° 29' 37",35

138° 31' 24",15

J'en conclus immédiatement la latitude de l'observatoire et la déclinaison de l'Etoile.

Déclin. de la Polaire 88° 30' 22",65

Lat. de Greenwich 100 0 0

48 31 24,15

51° 28' 35",85

Il y a une erreur de 3" avec la vraie valeur 39" inscrite dans les Tables.

Tel est le procédé qu'il faut quand on détermine à loisir les latitudes et qu'on a du temps et des instruments à sa disposition.

On peut avoir ainsi une confirmation de l'existence des réfractions. Car si l'on recommence avec des étoiles de plus en plus éloignées du Pôle,

on trouve pour ceux-ci des positions de plus en plus élevées : et qui redeviennent les mêmes quand on fait les corrections.

80. — Si maintenant une étoile n'est pas circumpolaire, et si l'on ne la voit qu'à son passage supérieur, comment faire pour avoir sa déclinaison ?

Observons le même jour, 20 Mai, le passage de la Chèvre. — Elle passe à la division

94° 21' 44",8

au sud du zénith. — Mais la réfraction est

5",5

donc la lecture qu'on aurait dû faire est

94° 21' 39",3

J'en retranche la situation de l'Equateur sur le cercle mural

48° 31' 24",15

et j'ai la déclinaison

45° 50' 15",15

Sur les tables des Etoiles, on trouve

45° 50' 14",2

qui est la moyenne des observations.

81. Je me suis placé dans le cas où l'on dispose de temps et de grands instruments. Telle n'est pas la situation d'un navigateur ou d'un voyageur qui ont besoin d'opérer rapidement. — Pour les voyageurs, ils prennent des cercles plus petits, et ont des résultats moins précis. — Il est d'abord indispensable de fixer la position du zénith. — Fil à plomb : — Bain de Mercure : ou bien on peut prendre un miroir qu'on rend bien horizontal avec des niveaux d'eau, mais c'est moins exact.

Cela fait, on observe la première étoile qui passe dans le plan du cercle, la Chèvre par exemple. On trouve que sa distance zénithale est 10°. On a sa déclinaison trouvée dans les grands observatoires. Donc

$$10° + 45° 50' = 55° 50'$$

est la latitude du lieu. — Et remarquons que l'observation d'une seule étoile suffit.

Passons au navigateur. — Ici, la question est plus délicate. On ne peut d'abord disposer un cercle à cause du balancement du navire. — On a inventé pour y remédier des instruments à réflexion, destinés à trouver la distance angulaire de deux objets célestes. — Si l'on a dirigé un cercle dans le plan des deux objets, qu'on vise le premier, et qu'on revienne au second, on ne le retrouvera plus : le mouvement de la Terre s'y oppose. Cela a lieu à terre. En mer, cela se compliquerait encore du mouvement du vaisseau. Néanmoins on a vaincu la difficulté.

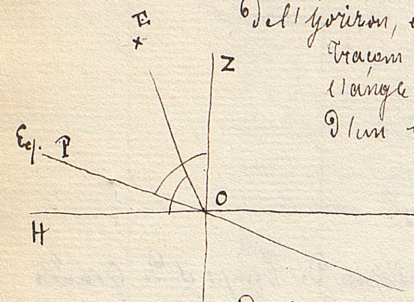
(voir la description du Sextant à la fin de la Cosmographie de Biot.)

En mer, on ne fait pas usage de la mesure de la distance angulaire de deux étoiles : car ces distances étant les mêmes pour tous les points de la Terre, cela n'apprendrait rien. — Mais on prend la Lune, quand elle est visible : on vise une étoile directement, et l'on fait coïncider le bord de la Lune avec elle... On ne peut mesurer la distance d'une étoile au ~~la Lune~~ Soleil : car en mer, et avec des lunettes imparfaites, on ne verrait pas les étoiles. — Si l'on voit en même temps le Soleil et la Lune, on mesure leur distance. (à quoi bon ? plus tard sans doute, on le dira).

C'est par la mesure de la hauteur du Soleil au-dessus de l'horizon qu'on détermine la latitude en mer. — on y arrive au moyen de la propriété que possède la mer de se disposer d'elle-même suivant une surface plane (sphérique en réalité): la limite de l'horizon est assez nette. — on vise directement l'horizon: puis on tourne le miroir mobile jusqu'à ce qu'il y ait coïncidence entre le bord du Soleil et l'horizon. — L'opération se fait à midi. — avec des éphémérides, qui donnent les déclinaisons du Soleil, on pourra trouver la latitude.

Si l'on opère avec une Etoile, la nuit (mais alors on voit mal l'horizon) il suffit d'avoir une table des déclinaisons des Etoiles.

Je dis maintenant que si l'on connaît la hauteur d'un astre au-dessus de l'horizon, et sa déclinaison, on pourra trouver la latitude du lieu.



Traçons en effet l'horizon, la verticale et l'équateur. E l'Etoile. on a l'angle EOH. on en conclut la distance zénithale. — Or la latitude d'un lieu est égale à la distance de son zénith à l'équateur.

On a donc

$$\text{Latitude} = ZOP = ZOE + EOP = ZOE + \delta$$

δ étant la déclinaison connue de l'Etoile.

La marche est la même quand on se sert de la Lune ou du Soleil.

Avec quelle exactitude un navigateur peut-il ainsi déterminer sa latitude? Sur la terre, une différence de latitude de 1" correspond à $\frac{9000}{1296000}$ lieues, ou $\frac{1}{144}$ de lieue. c'est à peu près 30^m. Par conséquent, si l'on obtenait la latitude à moins de 1", on aurait la position à moins de 30^m. — on ne l'obtient qu'à $\frac{1}{2}$ minute. Donc l'erreur est de 900^m au plus. C'est là la limite sur laquelle on peut compter avec de bons instruments.

Il faut tenir compte de la réfraction.

Et aussi de la dépression de l'horizon: on a construit une table de dépression qui permet de la calculer. (dans Callet, à la fin).

L'histoire de nos dernières guerres offre un exemple de la grande précision à laquelle on peut arriver. Une escadre de 5 vaisseaux de ligne devait passer de l'océan dans la Méditerranée: il fallait traverser le détroit de Gibraltar, où une flotte anglaise barrait la mer. — Il faisait nuit, et l'on se trouvait juste en face le détroit, dans l'alternative de donner contre les récifs si l'on avançait, ou de se voir attaqué si l'on attendait le jour. — Les divers vaisseaux se mirent à calculer leur position, et, tous trouvant le même résultat, on se décida à passer outre. — Les calculs étaient si exacts qu'on ne donna dans aucun récif, et qu'au lever du Soleil, on était hors de vue: — cette flottille reçut le nom d'Escadre Invisible.

Dans des guerres plus éloignées, un marin, pour n'avoir pas connaissance de sa position, fut obligé de stationner longtemps, et eut la moitié de son équipage enlevé par le scorbut.

Des Longitudes.

81. Pour les Etoiles, la détermination de l'AR est faite.

Pour les différents lieux de la Terre, nous n'avons pas encore déterminé la longitude, et il est nécessaire que cette opération soit faite avec la plus grande précision. Pour le marin surtout, sans la longitude, la connaissance des latitudes ne servirait guères.

82. Nous avons vu que l'aspect du ciel change quand on voyage sur un même méridien, et c'est là ce qui nous a permis de déterminer la latitude.

Il n'en est pas de même si l'on reste sur un même parallèle, celui de Paris par ex. Le spectacle des cieux pendant 24 h. ne change pas : les mêmes étoiles sont toujours visibles ; les mêmes se lèvent et se couchent. — Il n'est donc pas possible de songer à cela pour déterminer les longitudes. Il faut autre chose.

Ce problème des longitudes est fameux comme celui de la quadrature du cercle et de la trisection de l'angle.

83. Pour trouver les différences d'Æ en temps, nous avons observé l'intervalle du passage des étoiles au méridien.

Nous allons traiter le problème inverse. Nous ne ferons plus usage que d'une seule étoile et de deux méridiens.

Observons le moment où le méridien de St. Pétersbourg va passer par Procyon puis, la Terre étant emportée par sa rotation, observons le moment où le méridien de Paris passera par la même étoile. L'intervalle des deux passages donnera la différence des longitudes estimée en temps : en multipliant par 15, on l'aura en degrés : mais on ne se donne pas cette peine, les longitudes en temps suffisent.

Où gît la difficulté ? Les deux observations ne pouvant se faire au même point de la Terre, il y a deux pendules distinctes. L'observatoire de St. Pétersbourg a réglé son horloge sur le passage des étoiles à son méridien ; de même à Paris. Il n'y a pas de comparaison possible. Comment faire.

Emploi de l'électricité.

Procédons d'une manière plus uniforme. — D'abord, si l'on peut aller de St. Pétersbourg à Paris en 1 h. on peut avoir la longitude. Mais il n'est pas besoin d'aller si vite si l'on a un bon chronomètre. — Faites que ce chronomètre marque $0^h\,0^m\,0^s$ au passage d'α d'Andromède au méridien, et aussi au passage suivant : restez à St. Pétersbourg assez longtemps pour cela. Puis venez à Paris, et vous y aurez l'heure de St. Pét. — Les nouveaux chronomètres ont une grande précision : ils ne varient pas si on les transporte de Paris à Strasbourg, puis de Strasbourg à Paris. — J'ai supposé par simplicité que l'instrument est parfaitement réglé : si l'on a une seconde de retard uniforme, on n'y touche pas : on en tient compte.

Les chronomètres servent donc pour de grandes distances.

L'empire Russe est fort étendu, et si l'on avait voulu effectuer une triangulation, on n'en aurait pas fini : on se transportait en poste avec de bons chronomètres : et l'on a fait ainsi la géographie Russe avec une grande exactitude.

84. Avant que les chronomètres ne fussent transportables, pour plus de précision on ne les déplaçait pas, et on les réglait d'un bout à l'autre par le moyen d'un ou de plusieurs signaux par des feux de poudre.

Les signaux électriques par les télégraphes ont été depuis peu employés en Amérique : — pas encore en France.

On s'est servi aussi depuis quelque temps en Angleterre, en Danemark et en Amérique, du passage des étoiles filantes. Ordinairement, il y en a 7 ou 8 par heure dans une moitié du ciel : ~~au mois~~ d'avril et en septembre, il y en a plus de cent. Il est donc impossible que, de deux points donnés de la Terre, l'un de ces météores n'ait pas été observé au même instant.

85. avant l'emploi des Signaux Terrestres, on n'employait que des Signaux Célestes. Les Eclipses surtout. Les eclipses de Lune ne peuvent servir, à cause de la pénombre. - Les Eclipses du Soleil n'ont pas cet inconvénient, puisque la Lune n'a pas d'atmosphère. Malheureusement, la Lune est trop voisine de la Terre pour que le phénomène soit vu partout au même instant physique. On peut faire une correction : mais elle repose sur des Tables Lunaires qui sont peu précises. - Enfin, une Eclipse de Soleil n'est visible qu'en peu d'endroits.

Depuis que Galilée eut découvert que les Eclipses des Satellites de Jupiter sont périodiques, on les a employées pour Régler les Chronomètres. Malheureusement, selon qu'on a une vue ou une lunette plus ou moins bonne, l'Eclipse a lieu plus tôt ou plus tard. D'ailleurs, l'observation des Satellites de Jupiter se fait avec des Lunettes trop longues pour être employées à bord des navires.

86. Les phénomènes célestes dont on se sert en mer sont les déplacements de la Lune ou des Planètes par Rapport aux Etoiles : mais les observations sont moins bonnes, parce que ces astres marchent lentement.

La Lune passe successivement sur certaines Etoiles. - Supposons-la à l'Etat de Croissant. La Lumière cendrée n'est pas Visible : on ne voit pas le Bord de l'astre : et l'Etoile disparaît subitement : c'est la Lune qui vient se placer devant. Voilà un phénomène qui est un Signal, comme un Signal de feu. Si donc tous les peuples voient ce phénomène au même instant, on peut s'en servir pour Régler les Chronomètres. Mais il y a une correction à faire parce que la Lune est près de la Terre.

Mais les Eclipses, ou occultations des Etoiles par la Lune sont trop rares (quant aux Etoiles suffisamment visibles) pour un navigateur qui ne peut pas attendre.

Mais, qu'est-ce que cela veut dire, que la Lune occulte une Etoile ? - que l'Etoile est à une distance du Centre de la Lune marquée par le Rayon Lunaire. On peut donc y substituer l'observation de la distance d'une Etoile quelconque au Centre de la Lune : on en conclut l'heure sans difficulté. Si par le calcul (ou les tables) on a reconnu qu'Aldebaran (qui est souvent occulté par la Lune) sera, à minuit de Paris, à 2° du centre de la Lune, et si en mer on observe cette distance de 2°. on en conclut qu'il est minuit à Paris. S'il est 6h du matin pour vous, vous savez que vous êtes à 90° de Long. O.

La Connaissance des temps contient des Tables de Distances Lunaires calculées 3 ans à l'avance : et qui fournissent la méthode la plus employée pour calculer la Longitude en mer.

Quel est le degré d'Exactitude sur lequel on peut compter ?

avec un Sextant, un bon marin ne se trompera pas de 20" ; cela correspond à environ ½ minute de temps. on a donc l'heure de Paris à ½ minute près. cela fait ⅛ de degré pour la Longitude. à l'Equateur, un degré a 25 lieues : c'est une erreur maxima de 3 lieues.

avec une série d'observations, on peut avoir une plus grande approximation.

87. Reste à déterminer l'heure du lieu où l'on est.

(incomplet).

8e. Leçon.

---

88. Nous savons donc déterminer les Longitudes et Latitudes, les AR et les Déclinaisons. Nous pourrons donc construire des Globes Terrestres et Célestes.

89. Triangulations Terrestres.
Grande Triangulation Française. – Vérification. – Exactitude de 2 pieds.

90. Cartes Géographiques.
Projection orthographique.
" Stéréographique.
Cartes de Mercator. – Loxodromie. –

91. Hauteur moyenne au-dessus de la mer:

Europe	650 pieds.
amérique N.	750 "
asie	1100 "
amérique S.	1150 "
afrique	inconnue.

9e Leçon.

92. Forme de la Terre.
Eclipses de Lune.
Mesure de la Circonférence.
L'opération de la mesure de la Terre se compose de deux questions distinctes :
1°. Mesurer en pieds la distance de A à B.
2°. Evaluer l'arc AB en degrés.

93. Première Question. – Pas de développements.
Plaines de Pensylvanie : Règles juxtaposées.
Triangulation.

92. Deuxième Question. – Rien n'est plus facile si AB est sur un méridien : sa valeur en degrés est la différence des latitudes.
Si c'est sur un parallèle, c'est la diff. des longitudes.

94. Les astronomes d'Alexandrie sont les premiers qui aient mesuré avec quelque exactitude les dimensions de la Terre. Ils avaient reconnu qu'à Sienne il existait un puits dont le Soleil venait éclairer le fond au Solstice d'Été, et qu'à ce moment, le Soleil était à 5° ½ du Zénith d'Alexandrie. Ils en avaient conclu que si, au Solstice d'Été, le Soleil était au Zénith de Sienne et à 5° ½ de celui d'Alexandrie, c'est que l'arc qui sépare Sienne d'Alex. est de 5° ½. Mesurant la distance en stades, ils eurent la grandeur de la Terre. Les documents sont perdus : nous ne savons pas quelle était la valeur du stade.

Il est impossible que les astronomes d'Alexandrie qui avaient des instruments pour mesurer les angles se soient contentés de procédés aussi grossiers. Probablement que dans Sienne il y avait plusieurs puits jouissant de cette propriété, et c'est la croyance populaire qui nous aura été transmise. Ainsi, nous sommes réduits à des conjectures sur la valeur du stade, en sorte que nous aurons plutôt là un moyen de déterminer la longueur du stade, en supposant que l'opération ait été bien exécutée.

95. On avait remarqué aussi, dans les voyages de Rhodes à Alexandrie, que Canopus du navire n'apparaît qu'un instant à l'horizon de Rhodes, tandis qu'il passe à 7° ½ au-dessus de l'horizon d'Alexandrie. On en conclut qu'entre cette ville et Rhodes, il y avait 7° ½ de la circonférence de la Terre. Cette observation ne pouvait être bien précise, à cause des réfractions. Quoi qu'il en soit, quant à la distance en stades de Rhodes à Alexandrie, les anciens paraissent l'avoir conclue du temps qu'il fallait pour aller d'un de ces lieux à l'autre.

96. Les deux résultats sont différents : mais nous ignorons si c'est le même stade.

97. Je passe sur les résultats des mesures faites par ordre des Califes : elles n'ont aucune précision.

98. La première mesure prise en France fut faite d'une manière assez singulière par Fernel : d'Amiens à Paris. –

99. Les Cassini reprirent ces mesures. Mais nous devons dire que dès lors on fut obligé de reconnaître que la Terre n'est pas sphérique, mais aplatie vers les pôles.

Voici les raisons.

Vers le commencement du 18e siècle, l'académie des Sciences, qui s'occupait

de faire avancer l'astronomie, envoya Richer à Cayenne. Cassini s'occupait alors beaucoup de la Réfraction, et il désirait établir une théorie précise des Réfractions, fondée sur des observations. On ne connaissait pas les pouvoirs réfringents; et l'on était obligé de les calculer par des observations astronomiques en observant le soleil. Le soleil, nous le verrons, se meut dans une orbite plane: mais, si on l'observait sans tenir compte des Réfractions, sa trajectoire paraîtrait à double courbure: donc, pour calculer les Réfractions, on cherchait quelles valeurs il fallait leur donner pour qu'elles s'accordassent toutes à donner au soleil une trajectoire plane.

Il y avait là deux théories mêlées ensemble: la théorie des Réfractions, et celle du soleil. Ce fut dans la vue de les perfectionner qu'on envoya Richer à Cayenne. Car dans ce lieu, qui est près de l'Equateur, le soleil ne s'écarte jamais beaucoup du Zénith: et, comme on avait déjà le moyen de corriger les Réfractions près du Zénith, on pouvait s'assurer si la trajectoire solaire était bien réellement plane. – Une fois que la théorie du soleil eût été ainsi établie, et d'une manière indubitable, on observerait pour les Réfractions, et l'on en pourrait faire la théorie.

Richer emporta avec lui une horloge bien construite et parfaitement réglée à Paris. Quand il vint à l'établir à Cayenne, elle ne battait plus 86400 secondes entre deux passages d'une étoile au méridien, elle battait moins: elle avait une marche plus lente: et cela n'était pas dû à une altération du Balancier; car, de retour à Paris, l'horloge recommença à battre 86400".

Qu'est-ce que cela signifiait? On sait que les oscillations du pendule dépendent de l'intensité de la pesanteur. La conséquence manifeste était celle-ci qu'à Cayenne, vers l'Equateur, la force de la Gravité était moins considérable qu'à Paris. Tout naturellement, on pensa qu'elle devait aller en diminuant des Pôles vers l'Equateur.

Deux Ecoles se formèrent alors. L'une soutint que la Terre est renflée à l'Equateur, aplatie aux pôles; l'autre, et Cassini à la tête, soutint que c'était l'inverse. Newton était à la tête de la première, et disait que la Terre tourne autour de son plus petit axe.

On ne peut dire que l'opinion de Cassini ait retardé la Science, car elle a été la cause d'un grand nombre de travaux de Physique. – L'Ecole [illegible] de Cassini n'a guère rendu à la Science que ce service, philosophiquement parlant: c'est de donner naissance à de nombreux travaux qui ont prouvé le contraire de ce qu'ils avaient avancé. – Cependant, le premier, Dominique Cassini, a découvert les Satellites d'Uranus et la Lumière Zodiacale: mais ses successeurs soutinrent toujours le contraire de la Vérité.

Voici comment Newton soutenait son hypothèse. –

Force centrifuge: (de l'inertie de la matière). Fronde. Cirque. Courbes des chemins de fer.

Supposons un corps se mouvant sur un cercle de rayon r, la circonférence étant estimée en mètres. Supposons que sa vitesse v soit estimée en mètres et par seconde. Appelons g l'intensité de la pesanteur, le double de la quantité dont un corps tombe en 1". Appelons P le poids du corps en kil. Quelle est la force centrifuge qui tend à le jeter de côté? C'est

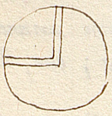
$$\frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{r}$$

Donc, plus la vitesse est grande, plus la force centrifuge est considérable: et comme elle est prop. au carré de la vitesse, si celle-ci double, elle devient quadruple.

Et, comme le Rayon se trouve au dénominateur, s'il devient deux fois moindre la force est doublée. on a donc tout intérêt sur les chemins de fer à n'avoir que des courbes d'un grand Rayon, et à marcher dessus avec une petite vitesse.

Newton dit d'abord qu'il était très certain que la Terre tourne autour de PP', et qu'il devait en résulter une force centrifuge. Il considéra que cet effet ne devait pas être le même dans toutes les parties de la Terre, car les parties voisines du pôle ont une très petite vitesse. Pour les différents points de la Terre, $\frac{v}{r}$ est constant ; donc $\frac{v^2}{r}$ augmente du pôle à l'Equateur. Dès lors, si les parties Equatoriales sont soumises à une force qui est moindre ou nulle pour les autres, il est facile de voir que l'Equilibre, en supposant la Terre fluide primitivement, n'a pu s'établir qu'au moins d'un aplatissement aux pôles. or, tout nous prouve que cet Etat a existé.

Considérons en effet, dans ce fluide primitif, un canal allant du centre au pôle, et un autre allant du centre à l'Equateur. Suivant les lois de l'Hydrostatique, pour qu'il y ait Equilibre, il faut que les deux poids se fassent Equilibre. or aucune partie du 1er. n'est soumise à l'action de la force centrifuge : tandis que le poids apparent du 2d. = son poids réel – force centrifuge. Donc, pour que le canal Equatorial contrebalance le canal polaire, il faut qu'il soit plus long.



En soumettant cette hypothèse au calcul, on peut arriver à déterminer la grandeur de l'aplatissement. on le trouve un peu trop fort ; c'est que la matière n'est pas répartie uniformément dans le Globe, et que la nature de la matière centrale est inconnue.

Voici maintenant une autre preuve.

Si la Terre était aplatie vers les pôles, la longueur de l'arc compris entre deux verticales distantes de 1°. ne devait pas être partout la même. Il est facile de voir que moins un arc est courbe, plus il faudra se déplacer pour que les deux verticales fassent un angle de 1°.

Il n'y avait qu'un moyen de trancher la question : c'était de mesurer différents arcs : et de voir si l'arc de 1°. est > au pôle qu'à l'Equateur. Si cela a lieu, l'hypothèse de Newton est exacte ; sinon, c'est celle de Cassini. – Il est vrai que Cassini avait commis une autre erreur, par un Raisonnement Géométrique inexact, en supposant que les verticales concourent toutes au centre de la Terre.

100. Par les soins de Cassini fut entreprise la première mesure qui devait être exacte. – Elle sembla donner raison à Cassini : le degré du N. était ~~plus~~ grand que celui du S. Mais il ne fut pas difficile de penser que la Terre étant peu aplatie, il pouvait arriver que les erreurs d'observation fussent plus grandes que les différences des arcs.

101. Mesures plus exactes. – La Condamine, Bouguer, etc.

2700 pieds est la différence entre l'arc de 1°. dans les Indes et en Suède.

102. Ces mesures d'arcs sont les Eléments à l'aide desquels on peut mesurer les dimensions de la Terre. – Quand on soumet la question à l'analyse mathématique, on en déduit le Rayon polaire et le Rayon Equatorial on trouve

Diam. Equatorial	41 847 192 pieds	}	Diff. 139 868 p.
" Polaire	41 707 324 "		

La moitié de cette différence est la hauteur du Bourrelet Equatorial: elle est environ 5 ou 6 lieues.

on peut remarquer que ces deux diamètres sont entre eux comme 299 et 298: l'aplatissement est donc sensiblement $\frac{1}{300}$.

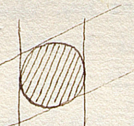
103. on conçoit sans peine que le calcul puisse donner le méridien complet (entier) et par suite la longueur du mètre.

10e. Leçon.

104. Nous arrivons à la Théorie du Soleil. –
Mais d'abord, l'Ellipse.
Propriétés principales. –
Question inverse: on a une Ellipse tracée, trouver son centre, ses axes, etc. – C'est
ainsi qu'opéra Képler.
Achever un arc d'Ellipse.
Tangente.
Propriétés optiques – Calorifiques – Sonores.

Théorie du Soleil.

105. Le Soleil nous apparaît sous la forme d'un Globe lumineux, et qu'à première vue on estime circulaire. Cependant, comme nos sens pourraient nous tromper, et que d'ailleurs nous aurons besoin de connaître les vraies dimensions, examinons plus attentivement la chose. – Pour cela, on place au foyer d'une lunette deux fils parallèles qu'on peut amener, l'un sur le bord de droite, l'autre sur le bord de gauche, par des vis extérieures. – Dans une lunette ordinaire, si vous tentiez cette opération, vous n'arriveriez pas, à cause du mouvement apparent du Soleil, à moins que ce ne fût au passage au méridien, avec des fils horizontaux. On a des appareils qui tournent, et font que la lunette suit l'astre, en sorte que la mesure précédente n'offre pas de difficulté. – Micromètre. – Si, sans déranger les vis,



on tourne l'instrument de façon à déplacer les deux fils, on les trouve encore tangents tous deux. – à quelque instant de l'année que l'on observe le Soleil, on trouve ainsi que tous ses diamètres sont égaux.

Il en résulte qu'à toutes les époques, la figure du Soleil est un cercle. Dans la prochaine leçon, par l'observation des taches, nous conclurons qu'il tourne, et nous présente successivement ses diverses faces. – En rapprochant cette connaissance, que nous acquerrons plus tard, de la précédente, nous en concluons que le Soleil est une Sphère parfaite.

106. Je viens de dire cependant que le Soleil tourne sur lui-même. De là, on est disposé à le croire aplati. L'observation ne veut pas dire autre chose, sinon que cet aplatissement est peu de chose. Le diamètre solaire étant de 1920", si l'aplatissement était seulement 1/400, cela ferait 6" de différence, qu'on observerait aux micromètres. – C'est que la vitesse de rotation du Soleil est très faible: sa révolution dure 20 jours: et l'aplatissement est $\frac{1}{6000}$ environ.

106. Lorsqu'on mesure le Soleil à différentes époques, on trouve que son diamètre n'est pas invariable. ainsi

31 Décembre, maximum Diam. = 32′ 32″
1er Juillet, minimum Diam. = 31′ 28″

Moyenne 32′ juste.

Donc, en Hiver, le Soleil est plus près de nous qu'en Été.
Ces mesures nous serviront à calculer la Grosseur du Soleil quand nous connaîtrons sa Distance.

11e. Leçon.

107. Le Soleil a un mouvement propre. Il se déplace chaque jour de quantités considérables par rapport aux étoiles. Il se transporte dans les différentes régions du ciel, et parcourt une circ. dans l'espace d'une année.

Cette observation demande de l'attention. – Le mouvement diurne peut se constater dans l'espace d'une nuit. Mais la lumière du Soleil empêche d'apercevoir les étoiles tant qu'il est sur l'horizon. – Cependant on peut, en observant les étoiles qui se lèvent quand le Soleil se couche, constater leur déplacement graduel. – Un mois après, les étoiles ci-dessus seront à une certaine hauteur quand le Soleil se couche. Or les étoiles sont fixes : c'est donc le Soleil qui s'en est rapproché.

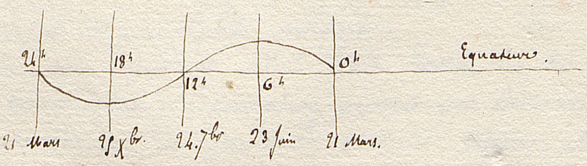
108. Au reste, des observations plus précises démontrent plus rigoureusement l'existence de ce mouvement du Soleil.

Nous savons comment on obtient la distance des astres en ascension droite. En effet, supposons que la pendule sidérale marque 0^h. au passage d'α d'Androm. et 3^h. lors du passage du ☉. Si, deux mois après, on fait une nouvelle observation, on trouve que l'horloge marque 7 heures. Donc le Soleil a avancé dans deux mois de l'intervalle correspondant à 4 heures. – C'est le 21 Mars environ qu'il passe au méridien avec α d'Andromède : puis il retarde de plus en plus, jusqu'à ce que la même coïncidence se reproduise après un an.

On n'observe pas le passage du centre du ☉, mais ceux des deux bords, et l'on prend la moyenne des deux observations.

Dans cet intervalle de temps, le Soleil ne reste pas toujours dans l'équateur. La mesure de sa déclinaison prouve qu'il est tantôt au-dessus, tantôt au-dessous. – Cette mesure se fait absolument comme pour les étoiles. Ici encore, on mesure la déclinaison des deux bords, afin d'avoir celle du centre qui en est la moyenne.

Quand le Soleil est dans le méridien d'α d'Andr. il est dans l'équateur. Sa déclinaison est nulle. Cela a lieu vers le 21 Mars. Sa déclin. augmente. 3 mois après, vers le 23 Juin, elle est de 23° 28'. Il est alors dans le méridien de 6 h. A partir de cette époque, la déclinaison du Soleil paraît stationnaire pendant quelques jours. Aussi on appelle ce point le Solstice d'Été. – Puis la D. diminue, et vers le 24 Sept. il est de nouveau dans l'équateur. – Dans les 6 autres mois de l'année, le Soleil suit, de l'autre côté de l'équateur, une courbe identique avec la précédente, mais au-dessous :



Au 22 Xbre la D. est encore 23° 28' australe. C'est le Solstice d'Hiver. Enfin au 21 Mars, il est de retour dans l'équateur et recommence la même route.

109. Mais ce n'est là qu'une orbe apparente, provenant de ce qu'on a déplié

la carte du ciel sur un plan. Que deviendra cette orbe sur la sphère? Il est facile de le savoir: il suffit de construire des méridiens espacés par ex. de 15°. et de porter dessus des arcs égaux aux déclinaisons correspondantes du soleil. on joindra par un trait continu tous les points ainsi obtenus, et l'on reconnaîtra qu'ils sont tous situés sur un grand cercle de la sphère céleste. On appelle ce cercle le Plan de l'Ecliptique. Son inclinaison sur le plan équatorial, égale à la plus grande déclinaison du soleil, est de 23° 28'. Elle éprouve de légers changements, sur lesquels nous reviendrons.

110. Par définition, on compte les méridiens à partir du point où le soleil coupe l'Equateur au 21 Mars, de l'intersection de l'Equateur et de l'Ecliptique. Il est arrivé par hasard que α d'Androm. se trouve dans ce méridien. Voilà pourquoi on prend cette étoile pour origine.

Quant aux points d'intersection, on les appelle Equinoxes de printemps et d'automne. Ces dénominations sont tirées des saisons.

111. Les observations ci-dessus ne suffisent pas. Il faut étudier le mouvement du soleil dans le plan de l'Ecliptique. Nous ne connaissons pas encore la nature de sa courbe. Il faut pour cela tenir compte de la distance du ☉ à la Terre, et non pas seulement de la direction dans laquelle il se trouve.

D'abord, le soleil est à une distance variable de la Terre, puisque son diamètre apparent varie.

Cela ne prouve pas que la courbe ne soit pas un cercle: il se pourrait que c'en fut un; la terre ne serait pas au centre.

112. Les mesures de l'Æ, de la D. et du Diam. apparent permettent de trouver chaque jour la position du soleil dans son plan.

Soit T la terre; TE la ligne allant à l'Equinoxe, TS celle qui va à une autre position du soleil. – L'angle ETS est ce qu'on appelle la Longitude astronomique. – Cette longitude comptée dans le plan de l'Ecliptique se déduit facilement de la connaissance des Æ.

Voici quelques nombres:

	1er avril	1er Juin	1er Août	1er Octobr.	1er Décembr.	1er Février
Longitude	12°	71°	129°	188°	249°	312°
Diam. appart.	1920"	1893"	1893"	1920"	1950"	1949"

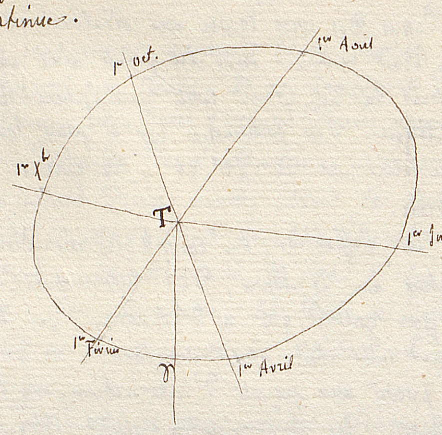
Si donc on peut trouver à quelle distance est le soleil de la Terre à chacune des dates précédentes, on pourra construire les positions du soleil sur ces droites, sur ces directions. Or, il est facile de comprendre que plus un objet est loin, plus son diamètre apparent diminue, et que la distance (pour de petits angles) est en raison inverse du diamètre apparent. En prenant pour unité la distance du soleil au premier avril, quand son diam. apparent est 1920", la formule qui donne la distance sera évidemment

$$\text{Dist.} = \frac{1920}{D.}$$

De sorte que les distances seront, aux époques ci-dessus,

1,0000 1,0143 1,0143 1,0000 0,9854 0,9857

on porte sur les Rayons correspondants des longueurs proportionnelles à ces nombres. Rien n'empêche de faire les déterminations intermédiaires, puis de joindre ces points par une ligne continue.



on cherche alors si la courbe est un cercle. Or, en menant une corde et une perp. au milieu, celle-ci ne passe pas par le centre.

Donc la courbe n'est pas un cercle.

113. Pour en trouver la nature, il a fallu venir jusqu'à Kepler.

Les anciens Egyptiens croyaient que le Soleil parcourt sa course en 360 jours d'où vient la division du cercle en 360°. - On s'aperçut bientot que cette hypothèse est insuffisante, et plus tard les Chaldéens, pour ne pas renoncer à l'hypothèse du mouvement circulaire, supposèrent que l'orbite solaire était un cercle dont la terre n'occupe pas le centre.

1400 ans après, les travaux de Tycho-Brahé et de Kepler son disciple ont enfin démontré que cette courbe est une Ellipse dont la terre occupe un foyer.

Ce n'est pas cependant sur le Soleil que Kepler a fait sa découverte : c'est sur la planète Mars. - Tycho-Brahé était lui-même disciple d'un ancien astronome, Guillaume IV, Landgrave de Hesse. après avoir employé 20 ans à des observations astronomiques, il mourut en laissant tous ses manuscrits à Kepler, afin qu'il en tirât le meilleur parti possible. - Kepler, remarquant sans cesse que les positions de Mars différaient de 7' environ des positions que lui assignait l'hypothèse du cercle excentrique, fut amené à rejeter cette hypothèse, et découvrit la première des lois qui portent son nom, celle du Mouvement Elliptique.

12e. Leçon.

114. Nous avons établi le mouvement apparent du Soleil à travers les constellations. Nous avons reconnu que ce mouvement a lieu de l'O. à l'E. c'est à dire en sens inverse du mouvement diurne, de droite à gauche.

Par suite de ce mouvement, le Soleil traverse l'Equateur au 21 Mars. Sa déclinaison devient boréale, elle augmente jusqu'au 23 Juin, où elle est de 23° 28'; vers les 2/3 du mois de Septembre, il retraverse l'Eq. ..etc.

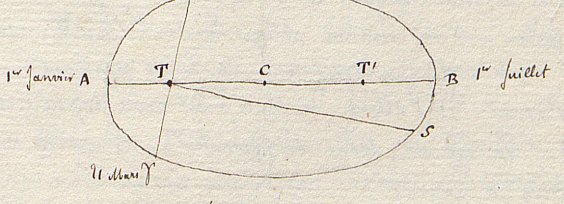
Le caractère d'une science est de ne pas se contenter d'observations, mais de les relier ensemble par des théories. – Ce que nous avons à chercher, c'est la manière de relier tous ces faits.

Nous avons trouvé que la courbe est plane. –

Figure. – Ecliptique. – Equinoxes.

Mais quelle est la courbe véritable que décrit le Soleil? Il y a bien de se le demander, puisque les diam. apparents sont variables. – Pour y arriver, nous avons conclu les distances au moyen de ces diamètres, et alors, combinant les observations en AR et D. qui donnent chaque jour de l'année la direction du Soleil, avec les distances de la Terre au ☉, nous avons obtenu une courbe qui, au premier aspect, ressemble beaucoup à une Ellipse, la Terre étant située sur le Gr. axe, mais non au centre. Kepler a reconnu que c'est véritablement une ellipse. – En menant deux cordes parallèles et joignant leurs milieux, on a un diamètre, dont le milieu est le centre de l'ellipse. – Rien de plus facile que de déterminer les axes en décrivant une circ. concentrique. – On reconnaît que le grand axe passe par la Terre, et que le petit n'y passe pas. – Si donc on suppose avec Kepler que la courbe est une Ellipse, et que la Terre occupe un des foyers, on trouvera facilement l'autre: et si l'on cherche à l'aide de ces deux foyers à décrire une Ellipse, elle coïncide avec la courbe déjà tracée.

115. Comment est placée cette Ellipse dans le plan de l'Ecliptique? Le Grand axe passe-t-il par l'Equinoxe ou par le Solstice? – Cette situation sera connue, si j'ajoute que le Gr. axe fait avec la ligne des Equinoxes un angle de 100°:



au 21 Mars, en ♈, le ☉ retraverse l'Equateur. – Si TS est perp. à la ligne des Equinoxes, S est le Solstice.

116. Les variations de la température sont dues à d'autres causes que la distance. autrement, il ferait plus chaud en hiver qu'en été.

117. apogée. – Périgée. –

118. Il n'est personne qui n'ait été frappé de ce fait que, dans leurs Ephémérides, les astronomes annoncent 10 ans à l'avance la position des astres, et prédisent les Eclipses. Comment arrive-t-on à un pareil résultat?

Voici les premières données dont on peut faire usage dans ce but. - Quand on a une fois fixé la position d'un astre, et qu'on sait qu'il tourne perpétuellement dans une même orbe, il y a, bien sûr, moins d'incertitude. Cela diminue la difficulté. Il n'y a donc qu'à fixer une fois pour toutes la position du ☉ par ex. dans son orbite.

Le second point de cette théorie du Soleil est, tout le nœud de l'astronomie.

119. J'ajouterai que dans cette ellipse solaire, l'excentricité $TT' = \frac{1}{50} AB$. en sorte que si vous vouliez décrire la figure avec un grand axe de 50 centim. la distance des deux foyers serait 1 cent. - Donc l'ellipse est très semblable à un cercle. - Plus exactement, $e = 0,017$. Si vous prenez un grand axe de 1m. vous aurez 17mm pour la distance focale TT'.

120. Il n'y a donc plus qu'à chercher comment le Soleil se meut dans son orbe. Rappelons-nous pour cela les distances du Soleil à la Terre :

1er avril	1er juin	1er août	1er oct.	1er Xbre	1er février (année suivte)
1,0000	1,0143	1,0143	1,0000	0,9854	0,9857

Maintenant, avec quelle rapidité le Soleil se meut-il dans son orbe ?

L'hypothèse la plus simple avait été faite par les premiers astronomes. Ils pensaient que la ligne qui va de la Terre au Soleil, le Rayon Vecteur du ☉, parcourt le même angle dans le même temps. Cela est-il vrai ? - Si l'on observe la situation du Soleil dans son orbite le 1er avril, et qu'on recommence le lendemain, on trouve que l'angle parcouru est

59' 4"

Le 1er juin, cet angle est

57' 25"

voilà qui tranche la question : il y a près de 2' de moins en un jour.
voici les chemins parcourus en 24h. sidér. à ces 6 époques.

	1er avril	1er juin	1er août	1er octobre	1er décembre	1er février
Dist. du ☉	10000	10143	10143	10000	9854	9857
Chemin parcouru	3544"	3445"	3445"	3544"	3652"	3650"

Il nous est donc impossible d'admettre l'hypothèse d'un mouvement angulaire uniforme. Nous sommes obligés de la laisser de côté.

(on peut remarquer que le Soleil parcourt environ 1°. par jour. - or Castor est distant de Pollux de 1°. C'est une échelle utile).

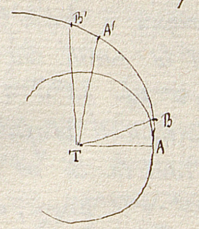
121. La loi est donc différente. - Pour la trouver, il faut recourir au tableau ci-dessus.

La première chose qui frappe, c'est que des mouvements égaux correspondent à des distances égales : - et cela pourrait nous faire croire qu'il existe une relation entre la distance et le mouvement angulaire. - En effet, on voit que, plus la distance est grande, plus le mouvement est lent.

Quelle est donc la loi ?

Nous pouvons d'abord remarquer que l'hypothèse la plus simple à faire, serait de supposer que le Soleil parcourt son ellipse d'un mouvement uniforme. Car, il est évident que, s'il en était ainsi, l'ang

décrit serait d'autant plus petit que le Soleil est plus loin : ainsi, en supposant que



le ☉ parcourt sur sa courbe des arcs égaux en temps égaux, on rendrait compte de cette apparence que le mouvem.t angulaire est d'autant plus lent que le Soleil est plus loin.

Voyons donc si cette hypothèse est admissible. — Une simple multiplication va nous l'apprendre. — Dans des cercles de même rayon, les arcs sont proportionnels aux angles au centre. Mais si les rayons sont 1m et 2m, l'arc de 1° dans le 1er sera la moitié de l'arc de 1° dans le second. Ainsi la longueur d'un arc est en raison composée de son angle et du rayon de la circonf. où il est : il double quand le rayon double, il double encore quand l'angle double. — Il en résulte que, notre ellipse étant presque un cercle, le chemin parcouru dans le petit intervalle d'un jour est directement proportionnel au produit des deux nombres écrits l'un sous l'autre dans le tableau précédent : et il faudrait, pour que notre hypothèse fût bonne, que tous ces produits fussent égaux. — Or les deux premiers sont

3544 et 3494.

voilà la question tranchée : il n'y a pas besoin d'aller plus loin pour rejeter cette hypothèse : car le propre d'une théorie est de répondre à tous les cas. Du moment qu'elle ne satisfait pas à un seul, elle cesse d'être exacte.

122. Faisons cependant toutes les multiplications, afin de nous en servir dans le choix d'une nouvelle hypothèse. — Nous trouverons :

3544 3494 3494 3544 3599 3597

Mais résulte cette conséquence que non seulement le mouvement angulaire est d'autant plus grand est que le ☉ est plus près, mais que les mouvements angulaires réels satisfont encore à cette condition.

Obligé de rejeter l'uniformité du mouvement réel, c'est ici que Kepler eut un trait de lumière. Il a fait une seconde hypothèse qui lui a réussi. Il a songé s'il ne pourrait pas y avoir égalité entre les quantités que je vais vous indiquer.

Si nous joignons T à chacune des positions du Soleil à 2 jours différents (1er et 2 avril) nous aurons un secteur dont la surface est facile à trouver. Soit ATA'. — Soit BTB' le secteur correspondant pour le 1er juin, &c. Kepler a eu l'idée, et c'est là ce qui a fondé les progrès de l'astronomie, et a donné à Newton le moyen de découvrir l'attraction universelle, — il eut l'idée de comparer ces surfaces entre elles. — C'est là ce qui constitue sa seconde loi. La première était que

Les planètes décrivent des ellipses dont le ☉ occupe un foyer.

La seconde est que chaque jour, en 24 h. quelle que soit la place que la planète occupe dans son orbite, la portion de plan comprise entre

la courbe et les deux Rayons Vecteurs est rigoureusement constante.

Cherchons à le vérifier. — La surface d'un secteur est le produit de l'arc par la moitié du rayon.

Encore bien qu'il s'agisse d'une Ellipse, on peut admettre qu'un secteur elliptique se confond ici avec un secteur circulaire.

Si donc la loi est vraie, multiplions chaque distance par le chemin calculé tout-à-l'heure, et tous les produits devront être égaux. — Le premier produit est 3544.

Le second

$$\begin{array}{r} 3494 \\ 1,0143 \\ \hline 3494 \\ 34,94 \\ 13,98 \\ 1,05 \\ \hline 3544 \end{array}$$

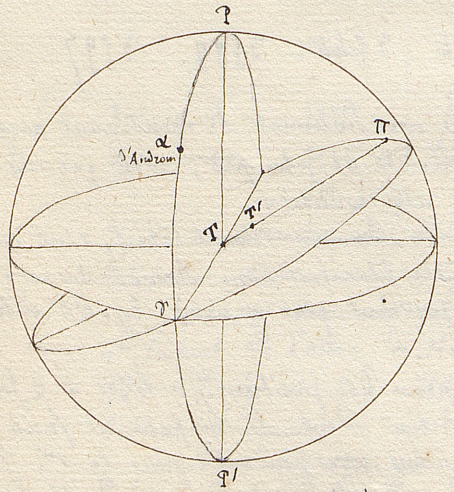
est aussi 3544. — Et de même pour les autres.

Le Rayon vecteur balaie donc au 1er Juin la même portion de surface qu'au 1er avril.

Ainsi donc la loi de Képler, qu'on vérifie de même pour toutes les époques intermédiaires, est bien exacte :

Les surfaces balayées par le Rayon Vecteur sont proportionnelles aux temps.

123. Sauf la difficulté qu'il y a à traduire cette loi en analyse, vous comprenez que nous avons tout ce qui est nécessaire pour prédire quelle sera à une époque qcq. la position du soleil sur la Sphère. Je trace la Sphère Céleste, la ligne des pôles, l'Equateur, et le méridien d'α d'Andromède : cela me donne le point Equinoxial ♈ du printemps. Si par ♈T je mène un grand cercle incliné de 23° 28' sur l'Equateur, nous aurons l'Ecliptique. — Il nous est possible maintenant de tracer dans ce plan l'Ellipse Solaire. Faisons un angle ♈TΠ = 100°. C'est la direction du Grand axe. Si maintenant nous prenons le Rayon TΠ = 1, et TT' = 0,017, T' sera le second foyer de l'Ellipse, que l'on peut décrire.



actuellement, ouvrez une Table du ☉ : vous trouverez le moment du 21 Mars où le soleil passe en ♈. D'ailleurs, une observation vous l'apprendrait. — avec la 2e loi de Képler, qui donne la surface balayée chaque jour (3544), il est facile d'en conclure la position du ☉ à un moment donné. — Reste cette question : de combien faut-il faire avancer le Rayon Vecteur pour que la surface décrite soit égale à une surface donnée ?

Tel est le secret du mécanisme des Ephémérides. — Seulement, on emploie le calcul.

124. Le mouvement du Soleil n'étant pas uniforme, le méridien dans lequel il se trouve chaque jour ne se meut pas uniformément. – Et, quand même le mouvement du ☉ serait uniforme, celui de son méridien ne le serait pas encore. – Car il est clair que des arcs égaux de l'Ecliptique, au Solstice et à l'Equinoxe, n'ont pas même projection sur l'Equateur.

Ainsi, deux causes s'opposent au mouvement uniforme du méridien du Soleil. – En toute rigueur, on pourrait se demander si ces deux causes ne se compensent pas. – En soumettant la question au calcul, on voit qu'il n'en est rien.

Mesure du Temps.

---

125. Pour l'astronome, la mesure du temps ne présente aucune difficulté. Car nous avons dit que les retours successifs d'une étoile au méridien sont toujours séparés par le même intervalle de temps. – Il y aurait donc dans le mouvement des étoiles tout ce qu'il faudrait pour régler le mouvement des pendules, et c'est ce qui se fait en effet dans les Observatoires: où les horloges marquent $0^h\ 0^m\ 0^s$ au passage de l'Equinoxe ♈ au méridien: et, comme α d'Andr. est à très-peu près dans ce méridien, c'est pour cela que j'ai dit qu'on se réglait sur cette étoile.

Mais si cette manière de régler les horloges sur les étoiles est commode dans les observatoires, cet usage est inapplicable dans la vie civile. En effet, supposons qu'à un certain jour (cela ne peut arriver que le 21 Mars) on observe le passage de α d'Andromède et du ☉ au Méridien, et que cela ait lieu rigoureusement au même instant physique. – Imaginons que notre pendule marque $0^h 0^m 0^s$ au pr. moment de ce passage simultané. Laissons s'écouler 24^h. venons observer de nouveau le passage d'α d'Andr. au méridien. Le Soleil n'y sera pas encore, et ne passera au méridien que quelque temps après. Il est facile d'avoir le retard. En 1 an, le ☉ parcourt la sphère, un cercle de 360°. Donc, en 24^h. il parcourt 1°. environ, ce qui, en temps, fait 4ᵐ: car nous faisons abstraction des inégalités. – Donc le passage du ☉ au méridien a lieu,

le 21 Mars	, à	12^h.
22		$12^h\ 4^m$
23		$12^h\ 8^m$
24		$12^h\ 12^m$

&c.

Un mois après, le 20 avril, le Soleil aura rétrogradé d'environ 30°, qui mettront le Soleil en retard de 2^h. – Au bout de 6 mois, le passage du ☉ au méridien aurait lieu à minuit de la pendule. – Au bout d'un an, le Soleil aurait passé une fois de moins au méridien.

Tout cela est impossible. – Il faut avoir des horloges qui marquent midi quand le Soleil est au milieu de sa course.

126. Pour y arriver, on réglait autrefois les horloges sur le ☉. C'est ce qu'on fait encore dans bien des Communes de France, mais c'est

un mauvais moyen. Car les Jours Solaires ne sont pas Egaux entre eux puisque son mouvement compté parallèlement à l'Equateur est variable. Nous ne savons pas construire d'horloges qui suivent rigoureusement le mouvement inégal du Soleil. on a cherché à en faire. Mais ce ne sont que des pièces curieuses. Une horloge qui suivrait exactement le ☉ irait tout de travers: car ce serait par hasard, et cela ne continuerait pas.

127. Voyons comment on peut avoir une mesure de Temps commune à tous les pays.

Faisons une hypothèse. Imaginons qu'en même temps que le ☉ part de l'Equateur au 21 Mars pour suivre son orbite d'un mouvement inégal, un second Soleil en parte également et suive l'Equateur d'une manière parfaitement uniforme. Supposons encore que, pendant que le vrai Soleil parcourt toute sa route de façon à revenir au point de départ, le Soleil fictif revienne aussi au même instant au point Equinoxial ♈. – ..

on est convenu de régler les horloges, non sur le vrai Soleil, mais sur le Soleil fictif.

Quelques explications sont nécessaires.

Nous avons dit en effet qu'il faut que les horloges marquent midi à Midi vrai: et je vous dis maintenant qu'il faut régler nos horloges sur un autre Soleil. vous me demanderez si les horloges marquent alors Midi au milieu de la journée. Or, s'il est vrai que le Soleil vrai ne se meut pas uniformément, il est vrai aussi qu'il n'y a pas de grandes différences, et si l'on compare par le calcul la position du ☉ vrai avec celle du ☉ fictif, on trouve que l'angle de leurs méridiens est toujours très-faible, de façon qu'entre les deux passages au méridien, il n'y a jamais plus de 17' d'intervalle (en temps) quelquefois, ils passent ensemble. Or, qu'importe 17' sur le midi d'un jour, si cette différence ne se manifeste pas brusquement d'un jour à l'autre? on ne s'en aperçoit même pas. – Il n'en serait pas de même si le midi était déplacé de 2 ou 3 heures.

ainsi, la condition énoncée sera remplie. ainsi, s'il y avait réellement dans l'Equateur un pareil Soleil, on l'emploierait avec avantage pour régler les horloges, de préférence aux Etoiles.

Maintenant, comment régler les horloges sur ce Soleil fictif? Par le même calcul qui apprend qu'il n'y a jamais plus de 17' d'écart, on peut reconnaître de combien le ☉ fictif avance ou retarde sur le véritable, et cela, chaque jour de l'année. cela est inscrit dans la Connaissance des Temps. On obtient ainsi le Temps moyen, sur lequel sont réglées toutes les horloges de Paris.

128. Pendant longtemps, les astronomes ont suivi cette méthode. aujourd'hui, on en a adopté une autre, qui donne une valeur un peu différente à l'Equation du Temps. quand le ☉ vrai arrive au Périgée, on fait partir le ☉ fictif d'un point de l'Equateur dont la distance à ♈ est égale à la distance de ♈ au Périgée. De cette manière, les écarts sont un peu mieux répartis. autrefois, il y avait 8' de retard max. et 25' d'avance. on a coupé la différence en deux.

129. Le Jour en astronomie est le Jour solaire moyen, en prenant pour unité de temps l'intervalle qui sépare deux passages successifs de ce Soleil moyen au méridien.

C'est ainsi qu'on règle les horloges.

130. Cadrans Solaires : pour déterminer le Temps Vrai.
Equinoxial.
Horizontal.
Vertical.

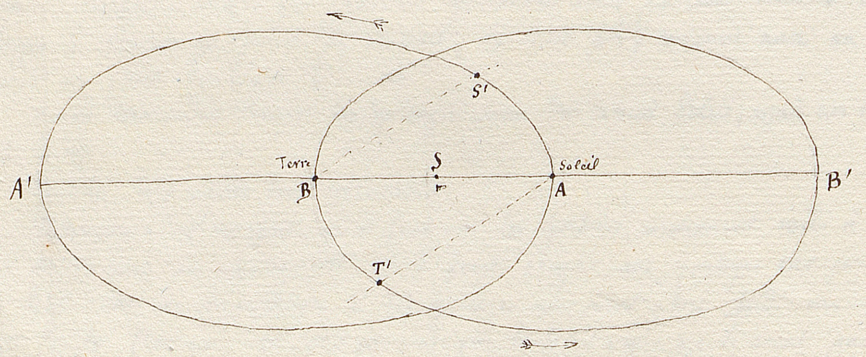
131. Un nouvel usage s'introduit depuis quelque temps, à cause des chemins de fer. on emploie dans toute une contrée la même heure. – En Angleterre, on a le temps moyen de Greenwich. – Bientôt en France, on prendra le temps moyen de Paris.

13e Leçon.

132. Jusqu'ici, dans l'exposition de la théorie du ☉, nous avons parlé du mouvement apparent du ☉, et employé un langage figuré.

Il est facile de reconnaître que ce que nous avons dit du mouvement du Soleil peut se rapporter à celui de la Terre.

Nous avons dit que le Soleil se meut sur une Ellipse dont la Terre occupe un des foyers. — Il suffit de supposer que la Terre se meut sur une Ellipse dont le Soleil occupe un des foyers. — Traçons deux Ellipses égales, comme ci-contre :



A est le Périgée, A' l'apogée dans la 1re hypothèse.
B est le Périhélie, B' l'aphélie dans la 2e.

Supposons que le ☉ se meuve, et arrive de A en S'. on le verra de la Terre suivant BS'. — Supposons que la Terre se déplace, et vienne en T'. on verra le ☉ suivant T'A. — Quelle différence physique peut-il y avoir entre ces deux rayons visuels ? Ils n'aboutissent pas à la même Etoile rigoureusement, mais ils sont parallèles. — Or, comme les Etoiles sont excessivement éloignées, il n'y a rien dans les phénomènes physiques qui nous permette de trancher entre ces deux hypothèses.

Cependant, dans ces derniers temps, Bessel, le 1er, à Kœnigsberg, au moyen d'un grand Héliomètre, est parvenu sur la 61e du Cygne, à mettre en évidence la différence entre ces deux mouvements. C'est par les observations qui lui ont servi à déterminer la distance de la 61e du Cygne à la Terre que Bessel a montré rigoureusement que c'est la Terre qui se meut autour du Soleil.

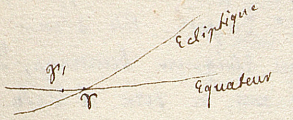
Ainsi, il sera bien entendu désormais que, lorsque nous dirons : le Soleil se meut, nous parlerons seulement des apparences, parce qu'il n'y a de différence entre l'apparence et la réalité que pour une demi-douzaine d'Etoiles.

133. Parlons maintenant de quelques perturbations que nous avons évité de signaler jusqu'ici.

La première est la Précession des Equinoxes.

Voici comment elle se manifeste dans les observations, et comment elle a été découverte par Hipparque, 125 ans avt. J.C.

Traçons l'Equateur et l'Ecliptique. — Si, une année, vous déterminez le point d'intersection de ces deux cercles, ♈, et que vous l'observiez l'année



suivante, l'Equinoxe aura passé de ♈ en ♈', et aura Rétrogradé vers la Gauche. - Il Recule de 50",1 par an. C'est une quantité très-petite, mais qui, s'accumulant d'années en années, produit des perturbations considérables. en 70 ans, elle est de 1°.

Nous Reconnaîtrons que cet effet est dû à l'aplatissement de la Terre. Mais laissons les causes, ne nous occupons que des phénomènes. Depuis Hipparque le point ♈ a Reculé de 30°. C'était alors le Bélier qui était la première constellation Zodiacale. Ce sont aujourd'hui les Poissons.

Il faut 25868 ans pour que le point Equinoxial fasse le tour entier du ciel.

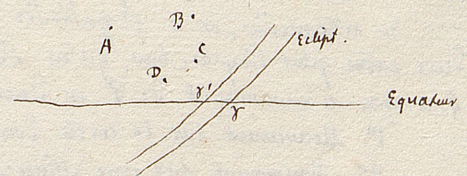
134. Sans nous occuper de la Cause, cherchons à découvrir les mouvements Réels qui donnent lieu à cette apparence.

Il y a deux Explications possibles:

1°. L'Equateur reste fixe et l'Ecliptique Rétrograde vers la Gauche.

2°. L'Ecliptique est fixe, et l'Equateur rétrograde.

Rien de plus simple que de trancher la question. - Considérons quelques Etoiles A, B, C, D, et plaçons-nous dans la 1ère hypothèse, celle où l'Equateur serait fixe:



la distance des diverses Etoiles à l'Ecliptique changerait, et leur distance à l'Equateur ne varierait pas. - Dans l'autre hypothèse au contraire, les déclinaisons varieront. - Il n'y a donc qu'à prendre des mesures Exactes à 100 ans d'intervalle, et à comparer.

Or, en faisant le calcul, on trouve que les distances des Etoiles à l'Ecliptique ne changent pas: les déclinaisons varient. - Donc l'Equateur change de position, et Recule son intersection avec l'Ecliptique, de façon que cette intersect. parcourt chaque année 50",1. D'ailleurs, l'obliquité Reste constante.

C'est donc un phénomène très-simple.

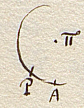
Pourquoi l'appelle-t-on phénomène de la Précession? Cela peut étonner, c'est que le déplacement de l'Equinoxe étant de même sens que le mouvement diurne, le nouvel Equinoxe, le vrai, passera demain au méridien un peu plus tôt qu'aujourd'hui.

135. Comme conséquence, il faut que l'axe de Rotation de la Terre se déplace dans l'Espace, puisqu'il est fixe dans l'intérieur du Globe, comme le prouve l'invariabilité des Latitudes, démontrée par Bessel.

Quelle est la loi de ce déplacement?

Si l'on élève une perp. au plan de l'Ecliptique, le point d'intersection de cette perp. avec la sphère céleste s'appelle Pôle de l'Ecliptique. - Il est situé dans la constellation du Dragon: cette perp. elle-même est l'axe de l'Ecliptique.

On représente le mouvement de l'Equateur Terrestre en supposant que le pôle du monde décrit autour du pôle Π de l'Ecliptique un petit cercle de Rayon 23° 28', en 26000 ans. - Π reste fixe, mais le pôle de l'Equateur change de place dans le ciel. - ainsi l'Etoile polaire qui se



trouve actuellement à 1° ½ du pôle, n'en a pas toujours été aussi rapprochée. Au temps d'Hipparque, la Polaire actuelle était à 12° du pôle. Elle s'en rapprochera jusqu'à moins de ½ degré, et ensuite s'en éloignera beaucoup, de façon qu'elle ne sera plus la Polaire. Dans 13000 ans, ce sera α de la Lyre qui sera à 5° du Pôle.

Il y a 4000 ans, époque de la construction des Grandes pyramides de Gizeh, le pôle était à 3° 44' d'α du Dragon.

Cette situation du pôle à cette époque a donné lieu à une observation remarquable. La face Nord de ces différentes pyramides offre pour unique ouverture des passages tellement inclinés à l'horizon que, en les supposant construites il y a 40 siècles, on calcule qu'α du Dragon, à son passage inférieur au méridien, devait se trouver dans la direction des ? boyaux. Cela était-il un effet du hasard ? à quelle croyance cela se rattachait-il ? nous l'ignorons.

136. Pendant que nous y sommes, avouons que ce mouvement conique ne représente que le mouvement en gros. – Il est plus compliqué en réalité. Le pôle P ne décrit pas un cercle, mais une petite ligne sinueuse qui l'écarte tantôt à droite, tantôt à gauche de la même quantité 6",8.

En astronomie, on a l'habitude de scinder les phénomènes compliqués en deux autres plus simples, bien qu'en réalité il n'y en ait qu'un. – Ainsi, on décompose ce mouvement de P en deux :

1°. Mouvement sur le cercle dont π est le centre.

2°. Mouvement sur une ellipse.

Le premier est la Précession, le 2°. la Nutation, qui s'accomplit en 18 ans ½. Vous verrez que c'est juste le temps que les nœuds de la Lune mettent à opérer leur Révolution. – L'analogie a donc conduit à rattacher l'un à l'autre ces deux phénomènes.

Du Calendrier.

---

137. L'année doit être réglée sur le retour du Soleil à l'Equinoxe. Car c'est ce retour qui change les saisons.

Il faut donc compter l'année depuis le passage du ☉ à l'Equinoxe jusqu'au passage suivant. La durée de l'année est un peu moindre que si l'Equinoxe n'avait pas changé : il va au devant du Soleil.

L'année ainsi définie s'appelle **année tropique**. – C'est l'année civile. Sa durée en jours solaires moyens est de

$$365^{j}\ 5^{h}\ 48^{m}\ 49^{s},7$$

ou

$$365^{j},24224$$

c'est sur cette durée qu'il faut faire un Calendrier.

Comme l'année est de 365 j. et une fraction, il est impossible de faire une année d'un nombre exact et constant de jours.

Les Egyptiens faisaient l'année de 365 jours. On perdait chaque année un quart de jour. On finissait l'année trop tôt. Au bout de 4 ans, on commençait l'année 1 jour trop tôt, au bout de 8 ans, 2 jours trop tôt. En

4 fois 365 ans, on avait reculé de toute la sphère. — En 365 ans, on commençait 3 mois trop tôt : les saisons étaient interrompues.

etc. etc.

Mois lunaires de 29 j. ½.

Jours complémentaires des Romains.

Réforme Julienne. — Edit d'Auguste.

Réforme Grégorienne.

14e. Leçon.

138. Distance du Soleil à la Terre.

Lacaille au Cap, et Lalande à Berlin. — Quadrilatère facile à construire. — Calcul.

139. On en déduit la Parallaxe horizontale du Soleil, qui est 8",57.

140. On en déduit la distance : D = 206265 : 8,57 . r = 24000 rayons terrestres, ou 12000 diamètres. — Plus exactemt. D = 11992 diam. terrestres.

Cela fait environ 36000000 lieues. (Diam. Terr. = 3100 lieues). — Plus exactemt. c'est 38000000.

141. Le Diamètre du ☉ s'en déduit.

$$\frac{\text{Diam. } ☉}{\text{Diam } ♁} = \frac{1920''}{17'',2} = 111,5.$$

D'où le volume.

Constitution Physique.

142. Nous avons dit que le Soleil est fixe au foyer des mouvements planétaires. Cependant, il tourne sur lui-même. — Comment a-t-on pu le reconnaître ?

Taches qui tournent de G. à droite. — Leur déformation.

Rotation en 25 j. 1/4 d'occidt. en Orient.

L'Equateur Solaire est incliné de 7° 1/2 sur l'Ecliptique.

Une grande tache observée en 1769 est revenue jusqu'à 8 fois.

Toutes les Régions du ☉ ne sont pas également fertiles en taches. C'est surtout dans la Région tropicale, de 30° au-dessus et au-dessous de l'Eq., qu'on en trouve. — autour des poles, jamais. — Cela nous porterait à croire qu'il y a dans les Régions tropicales du ☉ des mouvements pareils à ceux de notre atmosphère qui sont si réguliers près des tropiques. — Cela pourrait aussi nous conduire à penser que nous ne connaissons pas la durée réelle de la rotation du Soleil, mais seulement cette durée diminuée ou augmentée de la vitesse des mouvements de l'atmosphère solaire.

Les taches nous paraissent sous des aspects bizarres. Il y en a de divisées en deux ou trois par des traits lumineux. — Quelquefois, au lieu d'une seule tache, on en aperçoit une file se suivant l'une l'autre. — Dans ces derniers temps on a vu une tache à queue, ayant la forme d'une comète.

Les taches présentent toujours sur leurs bords une pénombre. — Et souvent la partie qui suit la pénombre est plus lumineuse que le reste du Soleil.

Les taches disparaissent rapidement.

La grande tache de 1769 avait 17000 lieues de diamètre. Car elle occupait les 20e du disque, et le diam. ☉ = 340000 lieues. — Or elle a disparu en 6 semaines, ou 42 jours. Le mouvement de cette matière était donc très rapide. La matière courait 17 lieues à l'heure pour se rejoindre. Le flux qui l'avait amenée avait été au moins aussi rapide.

Nous avons signalé la tache à queue, parce qu'elle prouve que non seulement les taches du ☉ ont un mouvement dans l'atmosphère, mais aussi un mouvement gyratoire. — Tout indique donc de grandes fluctuations dans l'atmosphère lumineuse du Soleil.

143. On a fait beaucoup d'hypothèses pour expliquer tout cela. Lalande supposait que le ☉ est une mer de feu, et que qqf. par suite des marées qui avaient lieu (on ne sait trop pourquoi) les pays situés au-dessous devenaient visibles. Les taches étaient des taches sous-marines. – Lalande se fondait sur ce que les taches reviennent souvent au même point. – Mais comment reconnaître bien au bout de quelques années qu'une tache est revenue à la même place ? Nous ne connaissons guères la durée de la rotation. Il y a 5 h. de différence entre les déterminations des divers astronomes. En 100 jours, on peut se tromper d'une rotation.

144. L'hypothèse de W. Herschell (1800) a plus de valeur. – La masse du Soleil serait opaque et non lumineuse par elle-même, et en général, nous ne la verrions pas. – Puis une atmosphère très-dense, non lumineuse. Puis une couche gazeuse peu transparente. Et enfin la Photosphère. Explication des phénomènes : les mouvements de la 1ère atmosphère déchireraient les deux autres.

Il ne paraîtrait pas que la matière lumineuse se borne à la Photosphère, mais qu'au-delà il y a encore une matière très-rare. Car, lorsqu'on observe les éclipses totales de Soleil, toute sensation lumineuse ne disparaît pas : il reste encore autour de la surface de la Lune une portion du ciel éclairée d'une lumière assez vive, et qu'on appelle la Couronne. Comme il n'y a pas d'atmosphère dans la Lune, on est porté à croire que c'est une autre atmosphère du ☉. – Ce n'est pas la même chose que les langues de feu des montagnes lumineuses qu'on a aperçues, et sur lesquelles nous reviendrons.

145. Un autre phénomène fort curieux a été observé par Dominique Cassini. C'est la Lumière Zodiacale, qui apparaît dans le ciel à l'époque des Equinoxes. – Si à cette époque, quand le ☉ est couché et que le ciel est pur, on regarde l'occident, il n'est pas rare qu'on aperçoive un fuseau lumineux qui s'élève dans le ciel à une distance très-considérable, et il est facile de démontrer géométriquement que si cette matière excessivement ténue appartient au ☉, elle va jusqu'à la Terre. – À l'Equinoxe d'automne, la lueur se voit sous forme d'un fuseau placé autrement et précédant le lever du Soleil.

On a attribué la lumière Zodiacale à une atmosphère du ☉, très ténue, et s'étendant à une distance prodigieuse. – Elle aurait une forme lenticulaire, et la Terre la traverserait aux Equinoxes ; et alors, on en verrait l'épaisseur, et elle deviendrait visible : – aux autres époques, on ne la verrait que par la tranche, et on ne l'apercevrait pas. – Cette matière serait disposée suivant l'Equateur Solaire.

15e Leçon.

Des Planètes.

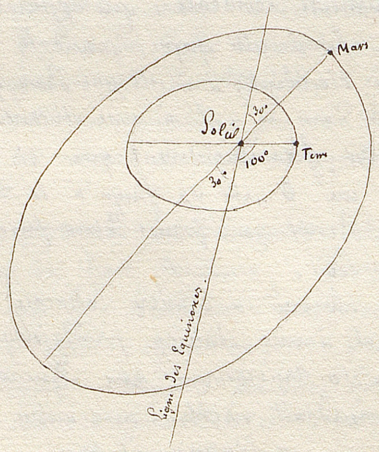
146. Dans l'Étude des Planètes, nous retrouverons les mêmes propositions que dans celle du mouvement du ☉. Car, en réalité, c'est la Terre qui se meut, en sorte que la Théorie du ☉ n'est autre que celle de la Terre, et par conséquent, d'une planète quelconque.

Ainsi, nous avons reconnu que la Terre se meut autour du ☉ dans un plan passant par le centre du ☉. — Il en est de même pour une Planète quelconque.

Mais tous ces plans ne coïncident pas entre eux, quoiqu'ils soient pour la plupart fort peu inclinés sur le plan de l'Écliptique. — Ainsi, l'orbite de Mercure n'est incliné que de 3°. par rapport au plan de l'orbite de la Terre, l'orbite de Mars, de 1°; celles de Jupiter et d'Uranus sont inclinées de quantités encore plus petites. Celle de Venus est la plus inclinée, ind. de 7°. C'est à cause de cette petite inclinaison que nous avons pu dire que toutes les planètes se meuvent dans le même sens.

147. Chaque Planète décrit une Ellipse dont le Soleil occupe un des foyers.

De même que les plans des planètes ne coïncident pas entre eux, les axes de ces Ellipses ne coïncident pas. — Les grands axes peuvent avoir une direction quelconque dans le Ciel. Ainsi, le Périhélie de la Terre est



à 100° de la Ligne des Equinoxes, tandis que celui de Mars en est à 30°.

Ces Ellipses n'ont pas toutes la même Excentricité, mais aucune n'en a une considérable.

Mercure	0,2	C'est la plus grande.
Venus	0,003	presque un cercle.
Mars	0,093	
Terre	0,017	
Jupiter	0,047	
Saturne	0,056	
Uranus	...	

La planète Mars ayant une grande excentricité, Kepler a trouvé la nature du mouvement elliptique sur cette planète, d'après les observations de Tycho-Brahé. Les autres ne permettaient pas de résoudre la question avec autant de facilité. Mercure n'était pas bien connu, et c'est depuis peu (grâce à moi..) : je doute que Tycho-Brahé en ait jamais fait une observation. Même Copernic, qui observait à Dantzick sur les bords de la Vistule, et qui a beaucoup travaillé sur Mercure, n'a jamais raisonné, pour cette planète, que d'après les observations d'autres astronomes mieux placés que lui. Car Mercure est très-près du Soleil, et, à ces époques, on ne le voyait que près de l'horizon, à travers les brumes : on n'avait pas de lunettes permettant de voir en plein jour.

148. Les arcs décrits par chaque planète en un jour sont d'autant plus grands que la planète est plus près du Soleil. La Terre en 1" parcourt en moyenne 7 lieues : les planètes plus voisines du ☉ en décrivent plus.

149. Si nous faisons pour chaque planète le calcul que nous avons indiqué pour la Terre, c.a.d. si nous calculons la surface balayée par le rayon vecteur en un jour, nous trouverons que cette surface est constante, c.a.d. que nous retrouvons cette loi dont l'énoncé technique est

Les aires décrites par le rayon vecteur sont proportionnelles au temps.

Seulement, ces aires balayées varient d'une planète à l'autre.

150. Il en résulte que le plan de l'orbite d'une planète étant connu, ainsi que la position de cette orbite dans son plan, et celle de la planète dans cette orbite à un moment donné, on pourra déterminer jour par jour sa position dans la suite des siècles.

Par la discussion des observations, on connaîtra la portion de surface balayée par la planète. — Si vous voulez la position de la planète 30 jours après, il faudra l'avancer de manière que le rayon vecteur ait décrit une surface 30 f. plus grande.

151. En principe, la position d'une planète dans le ciel est ainsi déterminée. Mais sa position apparente l'est-elle ?

Imaginons que le Soleil soit en S, et cherchons où Mars apparaît dans le ciel le 1er. Février 1855. Voyons quelle sera la suite des opérations.

L'astronome prend d'abord connaissance de l'obliquité du plan, et de la position de l'orbite dans ce plan. Puis, connaissant la position de Mars à une certaine époque, et la portion de surface balayée en 1 jour, il pourra marquer la position de Mars dans son orbite. — Si par ex. on donne la position de Mars au 1er. Janvier 1800, il y a 55 ans : ce qui fait, jusqu'au 1er Février 1855

$$(55 \times 365 + 14 + 31) \text{ jours}$$

(à cause des 14 années bissextiles). —

On aura donc ainsi la position de Mars par rapport au Soleil : en joignant SM et voyant à quelles étoiles SM aboutit, cela donne la Position Héliocentrique de Mars.

Mais maintenant, où la planète Mars nous paraîtra-t-elle ? — Il faut faire le même calcul pour la Terre, et en déduire sa position au 1er Février 1855. On joint alors TM, on prolonge jusqu'à la sphère céleste, et alors seulement, par cette longue suite d'opérations, on a la Position Géocentrique ou apparente de Mars.

La Théorie de la Terre est plus simple que celle d'aucune autre planète. Car, pour Mars, après la position Héliocentrique, il faut encore trouver la position Géocentrique. et cela complique la Théorie.

---

152. Encore bien que je n'aie pas l'intention d'entrer dans le détail de la détermination des Éléments d'une planète, cependant, je puis dire qu'ils sont au nombre de Six, dont voici le Tableau:

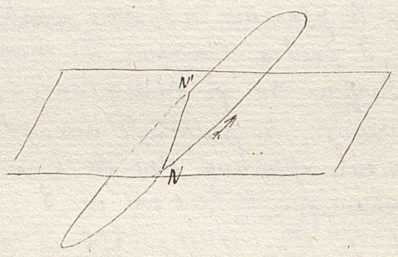
Position du plan.	{ Ligne des Nœuds Inclinaison }	2	Conditions
Forme de l'orbite	{ Grand axe Excentricité }	2	—
Position de l'orbite	{ Angle du Gr.d axe avec la Ligne des nœuds	1	—
Position de la planète	{ Position à une Époque quelconque.	1	—
	Total	6	Éléments.

Nous ne parlons pas de la durée de la Révolution, nécessaire pour avoir la surface balayée: nous verrons qu'on la déduit des données précédentes.

Vous serez satisfaits de savoir comment on détermine ces Éléments.

153. Supposons qu'il s'agisse de Mars.

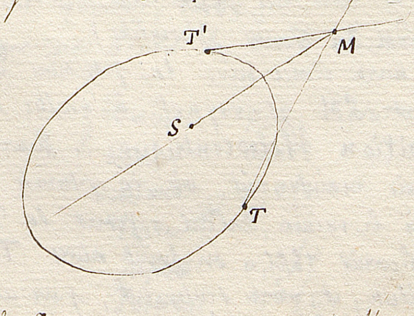
Soit l'écliptique et l'orbite de Mars:



L'inclinaison est exagérée.

définition: Ligne des Nœuds. — Nœud ascendant — Nœud descendant.

avant toutes choses, on peut déterminer l'instant où Mars passe au Nœud. C'est une direction à observer. — En outre, il est facile de voir si c'est un nœud ascendant ou descendant. — Et maintenant, si, à deux époques différentes on observe deux fois Mars à son nœud ascendant, nous sommes certains qu'il est revenu à la même position dans le ciel. — Je dis qu'on peut en conclure la position de la ligne des nœuds.



Soit le Soleil en S et la Terre en T au moment où Mars M passe au Nœud ascendant.

Joignons TM, puis, laissons écouler les jours, jusqu'au moment où Mars repasse au nœud ascendant. La Terre est alors en T' et nous avons la position de M. par l'intersection de deux lignes droites. Joignant SM, j'ai l'intersection de l'orbite de Mars avec le plan de l'écliptique. — on peut vérifier par le nœud descendant. De plus, comme l'orbite est presque un cercle, on a déjà une idée de ses dimensions.

La durée de la révolution est connue en même temps, par l'intervalle entre deux retours en M. — Le temps pour aller de M en M' n'est pas égal à celui de M' en M : à cause de l'excentricité.

Quelle est l'inclinaison ? — attendons le moment où la Terre est dans la ligne des nœuds. alors, Mars, la Terre et le Soleil déterminent le plan de l'orbite de Mars, dont on peut trouver la position.

Il faut maintenant déterminer la courbe décrite dans ce plan. — or, à un moment quelconque, si l'on joint TM, et si l'on détermine l'intersection de cette droite avec le plan de l'orbite de Mars, on a la position absolue de la planète. — On peut ainsi avoir plusieurs points de l'orbite, en trouver la nature, et vérifier les lois de Képler.

On peut encore opérer autrement.

D'abord, la durée de la révolution (710 jours) qui est connue, peut aussi se déterminer par l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux oppositions ou deux conjonctions. (à examiner).

Ensuite : on observe M : on tire TM. 710 jours après, M est revenu au même point du ciel. l'intersection de T'M avec TM donne M. Joignant SP, on a un diamètre de l'ellipse. — D'où le grand axe et la courbe, par plusieurs observations de ce genre.

16e. Leçon.

154. Nous avons vu que les grands axes sont indépendants les uns des autres pour les différentes planètes. Mais la 3e. loi de Kepler lie leurs valeurs aux durées des révolutions. — C'est la loi qui lui a coûté le plus de peine, 17 années de recherches, et, chose remarquable, il la supposa d'abord, mais une faute de calcul la lui fit croire inexacte, et il n'y revint qu'après un long temps, pendant lequel il avait oublié sa faute de calcul. — Voici cette loi, qui n'est pas approchée comme celle de Bode, mais rigoureuse.

Prenons pour unité de distance dans le ciel la distance de la Terre au Soleil, et pour unité de temps la durée d'une année tropique. — Imaginons une planète dont le grand axe soit 4, une autre dont il soit 9 (Saturne), une autre dont il soit 16 (un peu au dessous d'Uranus). — Pour avoir la durée de la révolution, multiplions le grand axe par sa racine carrée:

	1	4	9	16	25
Racine	1	2	3	4	5
Durée	1	8	27	64	125

Cette loi s'applique sans exception à toutes les planètes.

Les carrés des temps des révolutions sont entre eux comme les cubes des grands axes.

Voilà les données générales relatives au mouvement des planètes. — Nous allons parler de chacune d'elles en particulier.

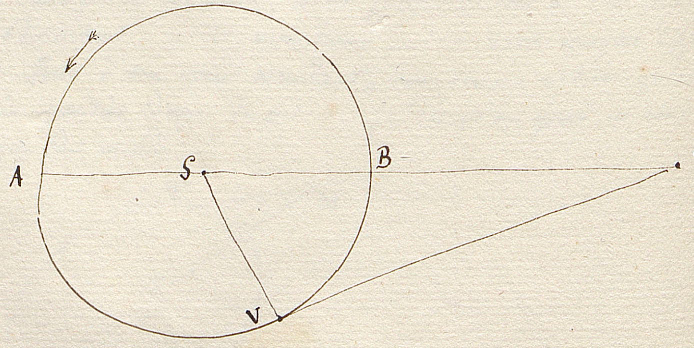
155. D'abord, il y a deux planètes plus voisines que nous du Soleil,

Mercure et Vénus.

on les appelle Planètes Inférieures.

Les autres sont les Planètes Supérieures.

Cherchons les apparences que nous présentent leurs mouvements, dont nous connaissons les lois.



Soit en S le Soleil, en V Vénus, en T la Terre. — En A, on ne voit pas Vénus: elle est en conjonction supérieure. — Mais ensuite on la voit promptement en B elle est en conjonction inférieure. — Lorsqu'au contraire, Vénus est voi-

-loin du Soleil, elle est dans ses digressions, et, lorsqu'elle est le plus loin du Soleil, on dit qu'elle est dans sa plus grande Elongation. — Les plus grandes Elongations de Mercure et de Vénus ne sont pas toujours les mêmes. Cela vient à l'excentricité de l'orbite: dans leurs périhélies, elles sont plus près du Soleil que dans leurs aphélies, et cela se complique encore de la position de ⊕. de la Terre: quand celle-ci est plus près du ☉, l'Elongation est plus grande.

La plus grande Elongation de Vénus est 47°. — celle de Mercure, 29°. — Cela montre que son orbite est plus petite que celle de Vénus.

156. De ces mouvements résultent des phases diverses. — Je parlerai de Vénus: car Mercure, étoile très-brillante, n'est presque jamais visible: les rayons du Soleil et les brouillards de l'Horizon lui sont contraires.

157. Vénus a un disque apparent de 40": elle doit présenter des phases, qui ont été aperçues par Galilée.

Explication de ces phases.

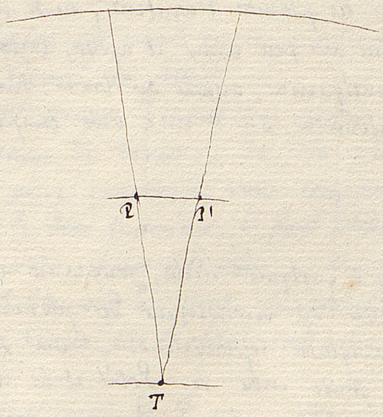
Mercure les présente aussi: mais elles ne sont pas nettes, à cause de son petit diamètre.

Il résulte de là pour Vénus des variations d'éclat. — Quand elle est à 40° d'Elongation, elle est la plus brillante. Cependant, elle a alors une forme échancrée. Mais une autre cause fait plus que compenser cet inconvénient: c'est qu'alors son diamètre apparent est plus grand qu'aux conjonctions supérieures, où elle est pleine, mais très-loin de nous. — En tenant compte de ces deux causes, on trouve un maximum d'éclat pour 40° d'Elongation.

158. La Parallaxe de Vénus à une époque qq. est égale à son diamètre apparent à la même époque. Donc les dimensions de Vénus et de la Terre sont les mêmes.

La matière de Vénus pèse $\frac{1}{8}$ de moins que celle de la Terre. — Nous y arriverons par la considération des actions de la Terre et de Vénus sur les autres planètes.

158. Nous avons parlé jusqu'ici des mouvements apparents rapportés au Soleil. — Parlons maintenant de ces mouvements rapportés à la Sphère céleste.



Soit la Terre fixe en T, et P une planète qui vient en P'. — Si la Terre se meut en sens contraire de la planète, le déplacement de celle-ci paraîtra plus grand. — Si elle se meut dans le même sens, elle peut avoir une vitesse plus petite, égale ou supérieure; de façon que la planète

paraît aller moins vite, ou s'arrêter, ou même Rétrograder. Les apparences les plus diverses peuvent donc se manifester.

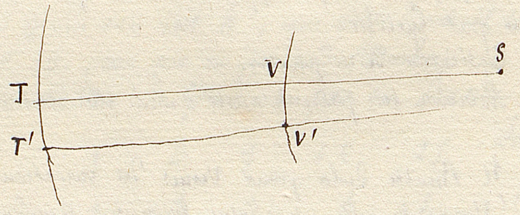
Cela s'appelle les Stations et Rétrogradations.

On en avait fait une objection à Copernic. – On avait recours alors, pour les expliquer, à la Théorie des Epicycles.

159. Examinons ce qui arrive pour Vénus.

À la Conjonction Supérieure, le mouvement apparent de Vénus sur la Sphère céleste doit paraître plus rapide que si la Terre ne se mouvait pas, puisque les mouvements sont alors opposés.

Prenons la Conjonction inférieure.



Soit T la Terre, V Vénus. Soient T' et V' leurs positions après 24 h. S'il y avait TT' = VV', les rayons TV et T'V' seraient parallèles, et, comme la Sphère céleste est à l'infini, Vénus n'aurait pas changé de place. Mais les espaces sont d'autant plus petits que la Planète est plus loin du Soleil. Donc TT' < VV'. – Donc 1. Nous voyons le mouvement. de Vénus ralenti, mais dans son vrai sens, inverse de celui du Soleil : il y a Rétrogradation.

(Entendons-nous bien : on est convenu d'appeler mouvement Rétrograde tout mouvement s'accomplissant dans ~~entre même~~ sens contraire du mouvement. apparent du ☉, c.a.d. de l'E à l'O.)

Ainsi dans la Conjonction Supérieure des Planètes Inférieures, le mouvement est Direct ; – dans la Conjonction Inférieure, il est Rétrograde.

Mais il n'est pas difficile d'apercevoir qu'il doit y avoir nécessairement un instant où les planètes s'arrêtent, ne se meuvent pas du tout. – C'est en effet ce qui a lieu un peu avant et après, lorsque l'inclinaison compense la vitesse.

En conséquence, quand on trace sur une Sphère céleste le mouvement des planètes inférieures, on a une orbe compliquée, telle que celle-ci



160. Il y a quelques siècles, lorsque les Lunettes n'étaient pas inventées, les particularités du mouvement des planètes, Vénus et Mars, ont été des causes d'objections au système Copernicien. – On disait : Toutes les fois qu'une planète Inférieure passe entre le Soleil et la Terre, elle devrait produire une Eclipse de ☉, et c'est ce qui n'arrive pas. – Cela tient à ce que les orbites des Planètes ne coïncident pas exactement avec le plan de l'Ecliptique. – L'orbite de Vénus est inclinée de 3° ½ environ sur l'Ecliptique. Il peut donc arriver que, lorsque Vénus vient passer entre la Terre et le Soleil, la droite menée du ☉ ~~la Terre~~ à Vénus fasse un angle de 3° ½ avec l'Ecliptique or, Vénus étant alors 2 fois ½ plus près de la Terre que du Soleil, l'angle

De la Ligne TV avec l'Ecliptique est 2 f. ½ plus grand, ou 8° 3/4.



VST = 3° 1/2 VTS = 8° 3/4

Or le Rayon du ☉ est de 16'. Vénus sera donc projetée en un autre point du Ciel.

Il n'est pas cependant nécessaire que la Ligne qui va de la Terre à Vénus soit dans le plan de l'Ecliptique ne soit pour que l'Eclipse se produise. – Il suffit que l'angle VTS soit < 16', et pour cela, il faut que Vénus ne soit pas à plus de 6' de l'Ecliptique : car 6' (2 + ½) = 15'.

161. Kepler le premier, après ses Travaux sur Mars, se hasarda le premier, par un procédé particulier que nous verrons plus tard, à prédire un passage sur le disque du Soleil, pour Mercure, au commencemt. de Novembre 1631, et pour Vénus, au commencement de décembre 1631. Il pouvait se faire qu'il se trompât d'un jour, et il engagea les astronomes à vérifier.

Gassendi, au Collège de France, observa attentivement, en projetant l'image du ☉ au moyen d'une lentille dans une chambre noire. (Newton, beaucoup plus tard, observait encore ainsi).

Il vit quelque chose, mais ne crut pas que ce fût Mercure, car il ne vit qu'un petit point, et lui croyait un diam. de 5 à 6m, comme c'était l'idée d'alors : les lunettes manquant, l'irradiation augmentait considérablement les diam. des planètes. – Il crut que c'était une tache du ☉, et pour pouvoir comparer plus tard la marche de Mercure, il releva avec beaucoup de soin la marche de la tache. – Or, on la voyait changer de place, et se mouvoir dans le sens rétrograde, comme le disait Kepler.

Les observations de Gassendi n'eurent pas tout le succès et la valeur qu'on aurait pu en attendre. Car un observateur qui, placé à l'Etage inférieur, devait noter l'heure à chaque coup de pied de Gassendi, s'était ennuyé et était parti.

Cependant Kepler, qui vivait encore, eut la satisfaction d'apprendre que ses Tables avaient donné la vérité.

Mais il mourut avant d'avoir pu assister aux Efforts des astronomes pour observer le passage de Vénus. – Ici, la prédiction fut en défaut, les Tables n'étaient pas assez exactes. – Vous comprendrez en effet que, si la Planète doit raser le bord supérieur, il faut éviter la plus légère Erreur. Gassendi observa en vain, et ne vit rien. – Kepler fit bien de ne pas vivre plus longtemps : car beaucoup de Gens dénigrèrent ses Théories.

162. Les passages de Vénus sur le Soleil sont devenus très-célèbres à cause de leur Utilité.

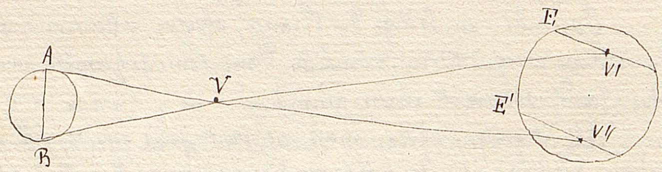
En 1677, Halley, ami de Newton, alla à Ste Hélène pour observer le passage de Mercure sur le Soleil. Eprouvant des difficultés pour déterminer l'instant du phénomène, Halley en conclut que, puisque ce passage dépend de la distance de la Terre au ☉, on pouvait en conclure cette distance, et, en y réfléchissant, il conclut que les passages de Vénus sur le ☉ donneraient une précision bien plus grande que ceux de Mercure.

à cette époque, la triangulation dont je vous ai parlé pour mesurer la distance de la Terre au ☉ était inabordable : les instruments n'étaient pas assez précis : car les plus légères erreurs font qu'on se trompe beaucoup. Donc à cette époque, la méthode par les passages de Vénus sur le Soleil était indispensable. — voir Biot. — On a trouvé ainsi 17",2 pour la parallaxe du Soleil.

Depuis, les astronomes du Cap de Bonne-Espérance et ceux de Berlin ont trouvé par le procédé de Lacaille 18",2. — Une seconde n'est pas une chose négligeable. On ne conçoit pas que les instruments donnent cette erreur, et que la distance du ☉ donnée par Vénus et par les observations angulaires directes ne donnent qu'une précision de 1/18. — On serait tenté de croire que, de part et d'autre, on a raison. Je n'oserais me prononcer.

163. Je vais vous faire comprendre comment les passages de Vénus sur le Soleil ont pu donner la distance de la Terre au Soleil.

Supposons deux observateurs situés aux extrémités d'un diamètre terrestre. C'est à peu près ce qui eut lieu en 1769, où l'on observait en Finlande, tandis que Cook s'était rendu à Taïti. — Ces deux observateurs ne verront pas la planète au même point du disque solaire.



Si nous joignons V'V'', la théorie des mouvements de Vénus apprend que V'V'' = 2 1/2 . AB, puisque Vénus est à peu près 2 f. 1/2 plus près de la Terre que du ☉. — Il en résulte qu'au lieu de la parallaxe du ☉, il faut de préférence mesurer V'V'' qui est 2 fois 1/2 plus grand. On le trouve de 43". Si l'on divise par 2 1/2, on trouve 17",2, et c'est la parallaxe, d'où l'on déduit la distance de la Terre au ☉. — Voilà le principe général.

Il y a en outre des difficultés et des avantages de détail.

Comment observer V'V'' ? C'est un petit calcul. Car, à une certaine époque conventionnelle, relative aux cercles horaires, A détermine la position de V'', B celle de V', et, par le calcul, on en tire V'V''. — Il y a là une cause de précision, puisque c'est l'inconnue multipliée par 2 1/2 qu'on mesure. Or, si l'on peut se tromper de 1/10 de seconde, on ne se trompera pas plus sur 43" que sur 17",2 : l'erreur relative est moindre.

Mais ce n'est pas tout, et l'on trouve moyen de ~~tro~~ déterminer V'V'' plus exactement que par des mesures angulaires. — Il suffit de substituer à la mesure de la distance des cordes parallèles EV' et E'V'' celles de leurs longueurs, et l'erreur que nous pourrons faire aura bien moins d'influence.

Ce n'est pas tout. La longueur des cordes se déduit d'un autre phénomène susceptible d'une très grande exactitude. — Voici en effet comment se produit le passage d'une planète sur le disque du ☉. — Avec une lunette, on n'aperçoit pas l'instant précis où la planète arrive. On ne s'en aperçoit que lorsque la planète a échancré le bord circulaire du disque du ☉ et l'a échancré difformé. Là, on ne peut pas observer. Mais il arrive un moment où les deux points lumineux se rejoignent, et l'on ne peut s'y tromper d'1''.

C'est une observation susceptible d'une grande précision; il suffit d'avoir de bons yeux, une bonne lunette, et un chronomètre. — La planète s'approchant du bord occidental du ☉, le filet lumineux qu'elle laisse à sa droite va se rompre, c'est le 2e. contact intérieur pour la sortie. À partir de ce moment, le phénomène est terminé, il n'y a plus rien d'intéressant: le 2e. contact extérieur n'est pas bon à grand'chose, même pour la détermination du diam. de la planète, qu'on ne trouve pas bien de cette façon.

Ainsi, à l'observation des cordes, on substitue celle des deux contacts. C'est que la rapidité du mouvement de la planète est connue, ainsi que son diam. et celui du ☉, et l'on en déduit la longueur de la corde bien plus exactement. Ainsi, finalement, pour toute mesure à prendre, on a la durée du passage pour les deux observateurs.

C'est ainsi qu'en 1769 on a trouvé 17",2 pour la parallaxe du ☉, et par suite, 12000 diam. terrestres pour sa distance à la Terre.

164. Le prochain passage de Mercure sur le Soleil aura lieu en 1861.

Le prochain passage de Vénus aura lieu en 1874; un autre en 1882. Le dernier est celui de 1769. — Il y en a deux de suite à 8 ans d'intervalle, puis il n'y en a plus pour un siècle.

165. Malgré l'exactitude apparente de ce procédé, une des causes d'incertitude provient peut-être des déformations du disque du ☉ près de l'endroit où a lieu le passage, puisque nous avons vu disparaître des taches de 17000 lieues de diamètre. Une pareille tache aplatirait le ☉.

Planètes Supérieures.

166. Mars.
Petites planètes — 22 ou 23.
Jupiter.
Saturne.
Uranus.
Neptune.

Les 3 premières sont connues de la plus haute antiquité.
Cérès fut découverte par Piazzi le 1er. Janvier 1801.
Uranus par Herschell en 1781.

167. Mars est rouge, Saturne plombé, Jupiter brillant.

168. Comment a-t-on pu déterminer les distances et les diamètres réels?

À la distance 1, la Terre est vue du ☉ sous un angle de 17",2. — Quand Mercure passe sur le disque du Soleil, il apparaît sous un angle de 12". Cette quantité ne peut être comparée à 17",2: car alors Mercure est à une distance du ☉ = 0,4, et à une dist. de la Terre = 0,6. Il doit donc paraître plus gros que s'il était à la dist. 1. — C'est donc 7",2 (calcul). — En un mot, pour mesurer le diam. réel d'une planète, il faut multiplier son diam. apparent, vu du ☉, par la distance.

Si l'on veut avoir le diam. de Mercure en lieues, il est de 1700 lieues. — Le diam. apparent varie de 5" à 12", et c'est au diam. moyen que correspond à peu près celui d'où l'on a déduit la distance.

Le diam. de Vénus s'élève jusqu'à 61" quand elle est en conjonction infre.

Celui de Mars varie de 4" à 18", et son diam. est d'environ 1600 lieues.
Celui de Jupiter varie de 30" à 46", et son diam. est de 35000 lieues.
Le diam. de Saturne est de 31000 lieues.

169. Mercure et Vénus offrent dans la partie brillante de leurs disques une lumière à peu-près uniforme. On n'y trouve pas de taches persistantes. – Quelquefois, on a cru y voir des points brillants ou noirs, mais cela a été très-fugitif. – Cependant certaines irrégularités dans les cornes de Vénus ont montré que sa rotation est de près de 24 heures, et de même pour Mercure.

Elles ont une atmosphère.

170. Mars, quand son diam. est de 18", est très-voisin de nous, et, au milieu de son aspect rougeâtre général, certaines taches du disque offrent une teinte verdâtre. – Deux sont parfaitement blanches, et ont de plus grandes dimensions : elles sont aux pôles de la planète. Puis, dans tout le reste, il y a des veines et des sinuosités qui tranchent très-bien : entre elles, sont des places verdâtres et jaunes. Les dernières sont peut-être des plaines ocreuses. Les vertes sont des mers.

Deux circonstances viennent à l'appui de cette opinion.

D'abord, il y a des taches qui oscillent, et prouvent qu'il y a une atmosphère.

Ensuite, l'ensemble des observations a montré que la planète tourne sur elle-même en $24^h\ 37^m\ 23^s$ et que cette rotation se fait autour d'un axe qui passe précisément par les deux taches blanches. – Eau. Glaces polaires. Donc, atmosphère. – Comparer avec la Terre vue de loin.

L'inclinaison de l'Équateur est de 30°. – Saisons.

Les taches blanches varient comme les saisons de Mars.

Tout est comme sur la Terre.

17e. Leçon.

171\. Il y a dans les apparences du mouvement des planètes supérieures des différences résultant de leur position par rapport à la T. et au ☉.

D'abord, elles ne viennent jamais en conjonction inférieure.

Conjonction. – Opposition.

Donc les planètes supérieures peuvent avoir toutes les élongations possibles.

Ces planètes ont des stations et des rétrogradations.

Aux oppositions, le mouvement est rétrograde. – aux conjonctions, il est direct et plus rapide.

D'après cela, on voit que leur mouvement apparent est assez compliqué.

Jupiter met 12 ans à faire le tour du Ciel. La Terre pendant ce temps fait 12 révolutions. Jupiter fait 15° en 6 mois : toutes les fois qu'il s'est laissé rattraper par la Terre, il rétrograde. Cela arrive 11 fois en 12 ans. Il en est de même de Saturne. Mais sa révolution durant 29 ans, il rétrograde 28 fois dans ce temps. – Uranus en offre 80.

Il est bien clair qu'il y a station dans l'intervalle.

Je n'insisterai pas : mais je ferai remarquer que l'arc de rétrogradation est d'autant plus petit que la planète est plus loin.

172\. Jupiter et les planètes plus éloignées n'offrent pas de phases sensibles. Car la Terre est tellement placée qu'on en aperçoit toujours presque toute la partie éclairée.

Mars seul offre des phases sensibles.

173\. Le diam. de Jupiter varie de 36" à 40"

celui de Saturne est d'environ 18"

" Uranus " 4"

" Neptune " 2" 1/2 à 3".

174\. Les planètes supérieures voisines offrent encore des accidents de lumière.

Pour Jupiter, qui, dans les lunettes, a un diamètre considérable, il présente des bandes qui changent avec le temps mais qui existent toujours. – Outre cela, on y voit des taches noires qui se déplacent très rapidement, et passent d'un bord à l'autre en 5 heures. – Rotation, en 9h. 55m 50". Jupiter fait 2 rotations 1/2 en un jour : ce fait est d'autant plus remarquable que Mercure, Vénus et la Terre tournent en 24 h. et que Saturne tourne en 10h 29m 17s.

Voilà donc deux grosses planètes qui se distinguent par une rotation très rapide.

De plus, leurs axes sont perp. au plan de l'écliptique et à la direction des bandes.

Aplatissement. – Pour Jupiter, l'axe polaire : l'axe équatorial :: 100 : 107. L'aplatissement est $1 : \frac{107}{100}$. – calculs, avec la Terre.

Saturne est aussi très aplati.

Quant aux autres planètes : Vénus doit avoir un aplatissement à peu près égal à celui de la Terre, $\frac{1}{300}$. Mais on ne l'a pas mesuré.

175\. Existe-t-il sur les planètes des êtres organisés ? – Fontenelle. – 3 choses à considérer : atmosphère, température, gravité.

Partout, il y a une atmosphère. – Les bandes de Jupiter sont des

nuages entraînés. — Si l'on observait la Terre de loin, on verrait près des côtes d'Afrique les nuages emportés par les vents alizés.

La Radiation solaire est 7 fois plus grande sur Mercure que sur la Terre. Sur Uranus, elle est 300 fois plus faible.

Pour Mars, la Gravité est moitié de g ; pour la Lune $\frac{1}{6}\,g$.

18e Leçon.

176. Passons à l'Étude des Satellites des Planètes.

De la Lune.

177. La Lune est dans le même cas que les autres planètes, sinon qu'elle tourne autour de la Terre et éprouve quelques perturbations que nous supprimerons d'abord.

Elle circule dans un plan passant par le centre de la Terre. Elle décrit une Ellipse dont la Terre occupe un foyer, et le Rayon vecteur, dans un jour, décrit toujours la même aire.

Nous ne reviendrons pas sur ces Lois. — Je vais vous indiquer seulement ce qui est différent, et vous verrez que pour étudier la marche de la Lune et faire sa Théorie, on peut employer les mêmes moyens que pour le Soleil.

Son Diam. apparent étant sensible, ses variations peuvent nous servir à trouver celles de la distance.

178. Nous ne reviendrons pas sur ses Phases.

Lune nouvelle. — Pleine Lune. — Syzygies — Quartiers. — Octans.

Lumière cendrée des Octans. — Pour savoir d'où vient cette Lumière, il faut savoir que le Diam. de la Lune est les 3/11 de celui de la Terre, et que la Terre sert de Lune à l'habé.

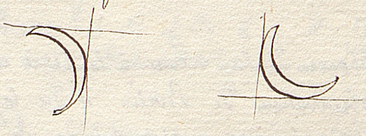
La Lumière cendrée est maxima à la nouvelle Lune.

179. avec un micromètre, on constate que le disque apparent de la Lune est circulaire. Je ne dis pas qu'elle soit Sphérique : probablement non ; mais nous n'en savons rien, parce que nous n'en voyons jamais qu'un côté.

Le Diam. moyen est de 31′ 7″.

Quand on observe à la Lunette méridienne, on peut observer le passage d'un bord : on conclut le passage du Centre en ajoutant ou retranchant.

En outre, comme le croissant va d'une extrémité à l'autre, il y a toujours moyen de mener une Tangente verticale et une horizontale :



D'où la possibilité de faire la précédente observation, ainsi que celle de la distance Zénithale du centre.

180. On trouve ainsi que le plan de l'orbite est un Grand cercle de la Sphère incliné de 5° 8′ 48″ sur l'écliptique.

Nœud ascendant ☊

Nœud descendant ☋.

181. On vérifie les lois du mouvement de la Lune comme celles du mouvement du ☉.

182. Le Grd. axe est 59 fois (59,9623) le diamètre de la Terre.

L'excentricité 0,055. — Le grand axe a été trouvé par un Triangu-

-lation, par Lalande à Berlin et Lacaille au cap de Bonne-Espérance.

183. Le mouvement de la Lune dans son orbite est très-rapide. Sa Révolution s'accomplit en 27 j. $7^h\ 43^m\ 11^s,5$, environ 27 j. 1/3 : c'est la durée de la Révolution Sidérale, comptée à partir des Etoiles.

La Révolution comptée par rapport aux phases est plus longue : le mois Synodique est de 29 j. 1/2. - Explication. -

Inégalités de la Lune.

183. J'ai dit que l'orbite de la Lune est plane, ou à peu près. - Si l'on répète l'observation au bout de deux ou trois ans, on trouve que le plan a changé de place, en restant toujours incliné de 5° sur le plan de l'Ecliptique. La variation est très-régulière. La ligne des nœuds rétrograde, et effectue sa Révolution en 18 ans, 6 : ou plus exactement 6793,39. C'est un fait tout pareil à celui de la précession des Equinoxes.

On peut donc, connaissant la position du plan à une certaine Epoque, la calculer pour une toute autre Epoque.

184. L'orbite varie aussi dans son plan, tout en conservant la même excentricité et les mêmes dimensions. - Ce déplacement, toujours de même sens, est tellement rapide qu'en 9 ans (3232j,5753) le périgée et l'apogée sont revenus à la même place. - Et il est bon de remarquer que, tandis que la ligne des nœuds va en rétrogradant, le périgée a un mouvement direct.

C'est donc un calcul de plus encore à faire pour trouver la position de la Lune à une époque donnée.

185. voici les opérations à faire pour cela :

Traçons le plan de l'Ecliptique et la ligne des Equinoxes Tγ. - Il nous faut d'abord trouver le plan de l'orbite Lunaire. Soit T☊ la ligne des nœuds à l'Epoque t. Je la ferai rétrograder à raison de 3' 1/2 par jour, et, menant par sa nouvelle position un plan incliné de 5° 1/2 sur celui de l'Ecliptique, j'aurai le plan de l'orbite. - Nous connaîtrons le périgée par un calcul analogue. On tracera l'ellipse, et l'on aura recours aux surfaces balayées.

Après avoir traduit ces constructions en calcul, on traduit les formules en Tables.

186. La distance de la Lune à la Terre est de 60 rayons terrestres ; on l'a conclue des observations de Berlin et du Cap Good-Hope.

A cette occasion, on a l'habitude de dire que si le centre du ☉ coïncidait avec celui de la Terre, la Lune ne serait qu'à la moitié du rayon.

187. Le diam. de la Lune est les 3/11 de celui de la Terre.

Comment l'a-t-on trouvé ?

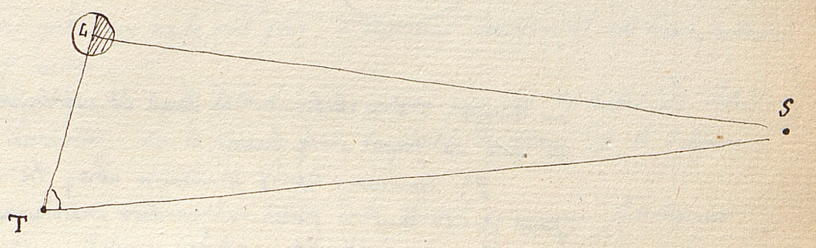
Nous savons que la distance est 60 r, et que la Lune est aperçue du centre de la Terre sous un angle de 31'. Inscrivons dans cet angle, à la distance de 60 r, un cercle, ce sera la Lune.

Les volumes sont entre eux :: 27 : 1331 ; le rapport est $\frac{1}{49}$.

D'ailleurs, par d'autres considérations (nutation et précession), on trouve que la masse de la Lune est $\frac{1}{86}$ de celle de la Terre. - Donc la Lune n'est pas aussi dense que la Terre.

188. ayant tracé la figure précédente avec exactitude, rien n'empêche de mener les tangentes à la Terre par le Centre de la Lune. on trouve ainsi que, pour un habitant de la Lune, la Terre apparaît sous un angle de 1° 54m. ainsi, pour lui, la Terre est un globe énorme, qui doit lui envoyer beaucoup de lumière. c'est pourquoi la lumière cendrée est si vive.

189. Soit la Terre en T, et considérons l'époque où la Lune apparaît sous la forme d'un Demi-Cercle. – Le Soleil est en S. – Si, par le centre de la Lune,



nous menons une perp. à la ligne de séparat. d'ombre et de lumière, elle passera en S. dans le triangle Rectangle TLS, l'angle T est connu. Donc on peut construire un triangle semblable, et comparer TL à TS. – Les anciens, en faisant cette mesure, avaient trouvé que le ☉ est 20 f. plus loin que la Lune. Ce n'était pas assez : c'est 400 fois. Mais c'était beaucoup. avant, on avait dit que le Soleil était gros comme le Péloponnèse. – La difficulté est de bien saisir l'instant de la Quadrature, et d'avoir l'angle en T.

190.

Le mouvement de la Lune autour de la Terre produit des Eclipses de ☉ et de Lune. – Ces éclipses ne se produisent pas à toutes les conjonctions ni à toutes les oppositions. – Il y aurait éclipse à toutes les Lunaisons si l'orbite Lunaire n'était pas inclinée sur l'écliptique. Mais c'est seulement quand la Lune est dans le voisinage de ses nœuds qu'il peut y avoir Eclipse.

Or les anciens avaient déjà remarqué que

223 Revol. Synod. de la Lune = 6585j,32 = 18 ans 10 jours.

D'ailleurs on trouve aussi que

19 Revol. Syn. du nœud = 6585j,78.

C'est-à-dire qu'à moins d'un demi-jour près, la Lune et le nœud, en 6585j½, partent ensemble d'une conjonct. avec le ☉ et y reviennent. Dans cet intervalle, il y a eu 223 coïncidences du ☉ et de ☾, et 19 de ☾ et du ☊. – Donc, après cette période, les éclipses doivent recommencer dans le même ordre, et c'est ce qui a lieu.

Ce fait n'avait pas échappé aux anciens, et les Chaldéens avaient appelé cette période la Période de Saros. – C'est ainsi qu'ils prédisaient les Eclipses.

Mais il y a cependant une petite erreur. – Et d'ailleurs, les inégalités de la Lune et l'excentricité de l'orbite terrestre empêchent la précision. – On ne peut prédire ainsi que les Eclipses totales : des éclipses d'un doigt pourraient bien disparaître dans la période suivante.

Pendant cette période, il y a 79 éclipses, 29 de Lune, 41 de Soleil (Il voir Pouye). – on voit que celles de ☉ sont plus fréquentes.

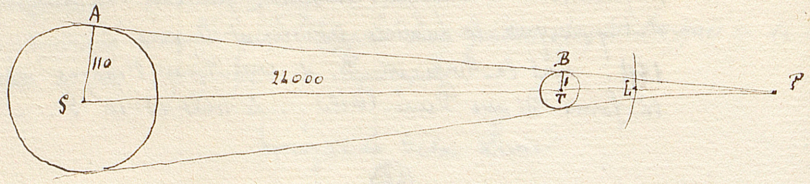
Dans une même année, il peut y avoir au plus 7 éclipses. – Il peut n'y en avoir que 2, et alors, c'est de ☉.

Nous ne parlons ici que des éclipses observées sur toute la Terre. – Mais

Il y aurait encore d'autres considérations pour les Eclipses visibles d'un point donné.

191. Cherchons les conditions qui doivent être remplies pour que l'Eclipse soit possible.

Pour les Eclipses de Lune, il faut que le cône d'ombre aille jusqu'à la Lune.



on trouve TP = 218. or la Lune est distante de 60. donc 1°. l'ombre de la Terre va jusqu'à la Lune.

2°. Examinons si, à la distance 60, la largeur de l'ombre est assez grande pour que la Lune y puisse disparaître entièrement. De L en P, il y a 158, de T en P, 218. or $\frac{158}{218} > \frac{3}{11}$.

Donc la Lune peut être plongée entièrement dans le cône d'ombre.

Toutefois les Eclipses de Lune, qui sont visibles partout (sur une moitié de la Terre) et partant fort intéressantes, ne sont pas susceptibles d'une grande précision à cause de la pénombre. — Lorsque la Lune arrive dans la pénombre, son éclat s'éteint peu-à-peu. Lorsqu'elle vient dans l'ombre pure, la portion qui se trouve dedans disparaît, l'ombre est de moins en moins éclairée. — Lorsqu'elle est tout entière dans l'ombre pure, on l'aperçoit de nouveau avec une teinte rougeâtre : mais c'est un effet de contraste. — avec une lunette, on l'aperçoit toujours, même dans l'ombre pure. La teinte rougeâtre vient de l'atmosphère de la Terre. — Car en tenant compte de la réfraction de 1° 6', on trouve que le point de concours des tangentes ne va pas jusqu'à la Lune ; aussi n'est-elle pas éclipsée totalement, et on ne la perd pas même dans une Lunette.

On ne peut rien tirer de là pour la théorie du mouvement de la Lune.

19e. Leçon.

---

192. Les Eclipses de Soleil sont produites par l'interposition de la Lune entre le Soleil et la Terre. – Elles sont analogues à celles de Lune, mais il y a des différences. En effet, les Eclipses de Lune résultent de l'anéantissement d'un flambeau, celles de Soleil, de l'interposition d'un Ecran. Donc les premières sont visibles pour tout le monde, et les autres ne sont vues que de certaines personnes. Car, quand on éteint une lumière dans une chambre, personne ne la voit plus : si l'on met simplement un écran, certaines personnes la voient encore.

Il peut arriver que le centre de la Lune ne passe pas sur le centre du Soleil : l'Eclipse est alors Partielle. On la mesure par la partie du diam. du ☉ éclipsée. On le partage en 12es. qu'on appelle des doigts.

Mais il peut arriver aussi que le centre de la Lune se meuve directement vers le centre du ☉. – Eclipse Totale. – annulaire.

Comme le diamètre moyen de la Lune diffère très peu de celui du ☉, la question ne peut se juger à priori : l'un et l'autre cas peuvent se présenter : car le diam. de la Lune est le plus petit quand elle est à l'apogée, et le plus grand quand elle est au périgée. – Il en est de même pour le diam. du ☉.

193. Examinons ce qui se passera dans les deux cas.

Supposons d'abord qu'au moment de l'Eclipse, la Lune soit apogée, et le ☉ au périgée. La Lune passera sur le Soleil comme Vénus, et l'on aura successivement les apparences suivantes :



C'est l'Eclipse annulaire.

Pour la Lune, le phénomène du Rapprochement des cornes est plus compliqué que pour Vénus : leur Réunion ne se fait pas par suite d'un avancement progressif : il y a des Irrégularités. – Cela vient de ce qu'il y a des montagnes de 2 lieues dans la Lune, $\frac{1}{100}$ du diamètre.

Puis, le phénomène inverse se produit.

194. Dans le cas contraire, où l'Eclipse est Totale, on peut apercevoir à la vue simple Mercure, Vénus, et les principales Etoiles. – Effroi des animaux. – alors, autour du disque de la Lune apparaît une couronne assez brillante formée d'une lumière blanchâtre continue, et tout-à-fait pareille au crépuscule du soir. – On aperçoit souvent des Gloires, c.à.d. des Rayons divergents.

On ne sait pas trop ce que c'est que cette couronne. Est-ce une atmosphère du ☉ ou une de la Lune ?

Montagnes Roses de la Lune. – On ne sait ce que c'est.

195. Différences qui existent entre les aspects d'une Eclipse pour les différents observateurs. – La Tache se promène sur la Terre.

196. Pour les habitants de la Lune, il y a Eclipse de Terre quand nous avons éclipse de ☉.

---

197. Eclipses d'Etoiles, ou Occultations. – L'Etoile peut disparaître en touchant le bord éclairé ou le bord obscur. – Dans le 1er. quartier, c'est le bord obscur qui va en avant : dans le dernier, c'est le bord éclairé.

Lorsque l'on voit le Bord occultant, il n'y a pas de surprise. — autrement, le phénomène est subit, et cela prouve que les étoiles n'ont pas de diamètre apparent appréciable.

Dans les occultations d'Aldébaran, on voit quelquefois l'étoile s'avancer quelques instants sur le disque, puis disparaître, puis réapparaître... cela s'explique par les anfractuosités de la Lune, dont la surface est très tourmentée, comme on le voit bien quand le ☉ l'éclaire obliquement. — Ces accidents sont 2 fois plus considérables que ceux de la Terre.

Détails.

198. absence d'eau et d'atmosphère.

199. La Terre reçoit de la chaleur de la Lune. — La pleine Lune dissipe les nuages c'est un fait météorologique constaté. — cela suppose que la Lune échauffe les nuages.

20e. Leçon.

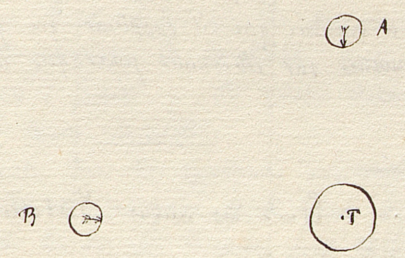
200. Lorsqu'on suit une tache de la Lune pendant le cours d'une Lunaison, une des montagnes centrales par exemple, on est frappé de la voir rester au même endroit, et la configuration de la Lune rester toujours la même. – Hévélius et d'autres nous ont laissé des Cartes Lunaires identiques aux cartes actuelles.

Nous n'avons donc jamais vu et nous ne verrons jamais l'autre face de la Lune.

Par la même raison, s'il y avait des habitants dans la Lune, l'aspect de la Terre ne serait pas le même pour tous : ceux du centre la verraient à leur Zénith, ceux des bords, à l'horizon, ceux de l'autre Hémi-lune ne la verraient jamais à moins d'un voyage.

Tout cela prouve que la Lune, en tournant autour de la Terre, tourne aussi sur elle-même dans le même temps.

Comprenons bien cette conséquence. – Soit un corps traversé d'une flèche. Si la direction de cette flèche ne change pas à mesure que le corps change de place, il n'y a qu'un mouvement de Translation : si elle change, il y a Rotation.. La conséquence est facile à voir pour le mouvement de la Lune. Voici la Lune. Traçons une flèche au point central, que l'on aperçoit



toujours au Centre. Si la Lune n'avait qu'un mouvement de Translation, cette flèche serait bientôt vue au Bord. – Quand la Lune est venue de A en B, il faut donc qu'elle ait tourné d'un quadrant.

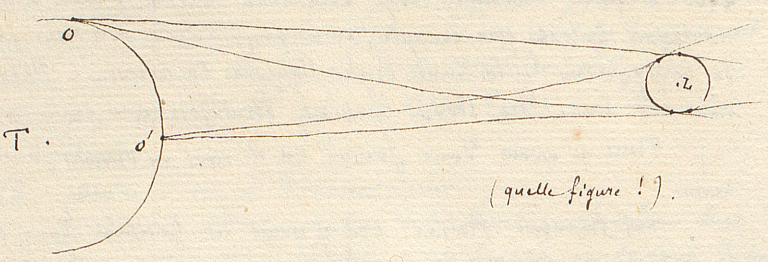
201. Cependant, je dois ajouter qu'il y a un petit mouvement oscillatoire qui fait que les taches des bords apparaissent et disparaissent, de sorte que l'on aperçoit plus de la moitié du disque.

En effet, comme conséquence de ce fait que la Lune présente toujours la même face, nous venons de voir qu'elle exécute un mouvement de Rotation sur elle-même. – Or l'observation a montré que, tandis que le mouvemt. de la Lune autour de la Terre est inégal, son mouvemt. de Rotation est uniforme, comme celui de la Terre. – Donc ces deux mouvements ne se peuvent compenser exactement, et l'on doit voir plus de la moitié de la Lune.

Ce phénomène porte le nom de Libration en Longitude.

202. Il y a une autre cause qui nous fait apercevoir un peu plus de la moitié de la Lune : c'est le voisinage de la Terre et sa Rotation. – Considérons un observateur placé en O, et ayant la Lune à l'horizon : il nous faudra, pour avoir la portion visible, mener deux Tangentes. – 6 heures après, l'observateur va venir en O', et aura la

Lune à son Zénith. – Deux nouvelles tangentes menées nous montrent qu'on aperçoit alors une nouvelle portion de la surface Lunaire.



(quelle figure !).

c'est la Libration Diurne.

203. Enfin il y a une 3e. Libration qui dépend de la position de l'axe de Rotation de la Lune par Rapport à l'Ecliptique. – Elle porte le nom de Libration en Latitude.

204. D'après ce qu'on sait à-peu-près sur les Satellites de Jupiter, on serait tenté de croire que cette loi de la Rotation de la Lune égale en durée à sa Révolution appartient à tous les Satellites. – on en a cherché les Causes. – on a cru la trouver dans un défaut de Symétrie du disque Lunaire. – La Lune serait oblongue, et plus dense du côté de la Terre. – L'explication serait alors très simple, et semblable à celle du pendule.

L'analyse a montré qu'il suffisait que pendant quelque temps la Lune ait ainsi tourné sur elle-même pour que cette circonstance se soit perpétuée.

Etude des autres Satellites.

205. Mercure, Vénus et Mars n'ont pas de Satellites.
Jupiter en a 4
Saturne 8
Uranus 6 (peut-être)
Neptune 2.

206. Pour les planètes escortées d'un grand nombre de Satellites, ils forment un Système Solaire en Miniature. – on pourrait donc les étudier sous le Rapport de leurs mouvements.

Cela a été fait pour les Satellites de Jupiter qu'on connait depuis Galilée depuis, on les a étudiés avec beaucoup de soin, d'autant plus que leurs éclipses donnent beaucoup de précision aux observations.

Tous les quatre circulent autour de la Planète dans le même sens que les planètes autour du Soleil, dans des plans passant par le centre de la planète, et très-peu inclinés sur l'Equateur de Jupiter.

	I	II	III	IV	(D'après leur distance)
Inclinaison	6"	1'	5'	24'	

Leurs mouvements sont elliptiques. Mais je me hâte d'ajouter que les excentricités sont si minimes, qu'on ne les a reconnues que dans ces derniers temps. ainsi, on peut dire sans erreur sensible que ces ~~ob~~ orbites sont des cercles au centre desquels la planète est placée.

Les deux premières lois de Kepler sont observées.

La 3e. l'est-elle ? — Nous n'avons pu le voir pour la Lune, puisque la Terre n'a qu'un Satellite. — or, si Ray. Jupit. = 1, on a

	Temps des Revol.	Distance
I	$1^j\ 18^h$	6
II	3 13	9,6
III	7 4	15,4
IV	16 17	27

La 3e. loi de Kepler est satisfaite, ainsi on déduirait la distance de 3 satel-lites de celle du 4e en supposant connues les durées des Révolutions.

207. Ces Satellites sont très petits. Cependant, avec d'excellents Télescopes, on peut mesurer leur Diam. qui est d'environ 1". on connait leur distance à la Terre, on en conclut leur Grosseur.

I	1000 lieues de Diam.
II	800 "
III	1300 "
IV	1100 "

or le Diam. de la Lune est de 800 ou 900 lieues. on voit donc que ces Satel-lites sont comparables à la Lune pour la Grosseur : mais ils sont très petits par Rapport à Jupiter. — Ces quatre lunes paraissent à la surface de Jupiter à peu près comme la nôtre.

208. Quelles sont les apparences que nous présentent ces 4 Satellites pour Jupiter ?

Jupiter est plus gros que la Terre et plus loin qu'elle du ☉. Il projette donc derrière lui un cône d'ombre fort étendu, qui va beaucoup plus loin que l'orbite du 4e Satellite. — Si vous vous rappelez que les plans des orbites des Satellites sont fort peu inclinés sur l'Equateur, vous ne serez pas étonnés que les 3 premiers s'éclipsent régulièrement. — Le 4e s'éclipse aussi presque à chacune de ses Révolutions. — Mais quelquefois il rase l'ombre et ne reste que très peu de temps invisible.

Ainsi les éclipses sont l'état habituel de ces Satellites.

Lorsqu'au contraire le Satellite vient se placer entre le Soleil et la planète, il doit produire une éclipse de ☉, ce qui en fait une toutes les 42 heures. — Ces éclipses sont très fréquemment totales, car, pour Jupiter, le ☉ apparaît sous un angle de 6'. — Les 3 premiers Satellites ont pour lui un Diam. plus grand que le ☉, et le 4e aussi très souvent. — L'éclipse n'est pas longue, parce que le mouvement des Satellites est très rapide.

Indépendamment de ces phénomènes, il y a un 3e. spectacle extrêmement fréquent. C'est que ces Satellites s'éclipsent les uns les autres. Ces éclipses indiquent bien le sens dans lequel se meuvent les Satellites. autrement, on ne sait pas si un satellite est devant ou derrière la Planète.

209. arrivons maintenant aux apparences vues de la Terre.

Prenons le 1er. Satellite se rapprochant de l'ombre. à un certain moment, il disparaît. — Il y a deux causes à cette disparition, soit parce qu'il est dans l'ombre, soit parce qu'il est derrière la planète. Quand il sort de

l'ombre, il se peut qu'on ne le voie pas. – C'est ce qui arrive souvent pour le premier Satellite. – Quand il passe au contraire devant la planète, on peut le distinguer avec une très-bonne Lunette quand il passe sur les bandes obscures de Jupiter. Mais il y a un autre moyen plus commode de le voir ; il peut projeter sur la planète une tache noirâtre qui le précède en marchant aussi vite que lui, et c'est ainsi qu'on peut suivre sa marche.

Pour le 4e Satellite, qui est très-loin, on peut le voir entrer dans l'ombre et en sortir du même côté de la planète.

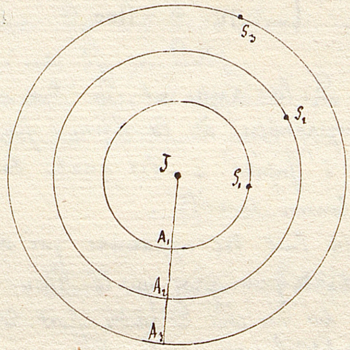
210. Ces phénomènes ont été d'une grande utilité soit pour l'avancement des théories astronomiques, soit pour le calcul des Longitudes.

211. Ces Satellites parcourent par heure

I	9°	} pour Jupiter.
II	4°	
III	2°	

Ces vitesses sont très-remarquables : la Vit. du 1er + 2 f. la vit. du 3e = 3 f. vit. du 2e. Quand on prend exactement les durées des Révolutions, on trouve cette loi rigoureuse. – Il y a une cause qui a produit cela.

Mais ce n'est pas tout : voici les orbites des 3 Satellites :



Menons au travers une parallèle à la Ligne des Equinoxes, et comptons les longitudes à partir de cette Ligne. – On a

$$A_1S_1 + 2A_3S_3 - 3A_2S_2 = 180°$$

ou

$$l_1 + 2l_3 - 3l_2 = 180°.$$

Entendons-nous bien : je m'étonne que $l_1 + 2l_3 - 3l_2$ soit constant, mais non que la constante soit 180°.

Les Géomètres se sont beaucoup exercés là-dessus. Nous ne savons pas la cause de ces rapports mystérieux. On n'est arrivé qu'à une chose, savoir que si cette loi avait été à peu-près vraie dans l'origine des temps, elle a dû devenir exacte par suite des actions mutuelles des Satellites. – Cela explique la chose jusqu'à un certain point : car l'à peu-près a été peut-être dû dans l'origine à des circonstances fortuites.

Il résulte de là que jamais ces 3 Satellites ne peuvent être éclipsés à la fois par l'ombre. – Car ils peuvent être tous cachés par la planète. Cela a été vu en 1682, 1780, 1802, 1806 et 1826 : Jupiter n'avait plus de Satellites.

21e. Leçon.

212. Les Satellites de Jupiter ont montré que la Lumière ne se meut pas avec une vitesse infinie comme l'attraction.

Déjà Descartes avait reconnu que, dans les Eclipses de Lune, il devait y avoir certains retards provenant de la Lumière. Mais la Lune est trop près de la Terre, et les Eclipses ne peuvent être observées avec précision.

Emploi des Satellites de Jupiter.

La Lumière met 8' 17" pour venir du ☉ à la Terre. Rœmer avait trouvé 8' 13".

Cela fait 70000 lieues par seconde : 10000 f. plus vite que la Terre dans son orbite.

213. De ce que la vitesse de la Lumière n'est pas infinie, il en résulte des différences de position pour les astres.

Considérons le cas où un astre serait en mouvement et la Terre en repos. Soit T la Terre, S l'astre. Supposons qu'à midi un rayon parte de S et se dirige vers la Terre, et supposons que ce rayon mette 10^m à arriver à la Terre. Il arrivera à midi 10^m, et nous verrons le rayon à cette heure dans la direction d'où il est parti. Nous croirons l'astre en S, il sera en S'. — Ainsi nous voyons un astre dans la position qu'il occupait avant l'époque de l'observation. Nous ne voyons jamais le ☉ à sa place, il est toujours un peu plus loin. Or, en 8' 17" le ☉ parcourt 20" ½ : mais la différence n'est pas grande, car son diam. est 1920". Cela fait $\frac{1}{96}$ du diamètre. — Mais 20" ne sont pas négligeables, et il faut avoir soin de les ajouter. — Les Tables du ☉ donnent la position apparente, et, pour les calculs géocentriques, il faut ajouter l'aberration. Sans cela, on aurait des résultats faux. —

Le Soleil n'a pas d'aberration diurne. C'est parce que le mouvement de la sphère céleste n'est qu'apparent, et que c'est la Terre qui se meut. Or il y a toujours des rayons qui rasent la Terre. Donc, quand l'observateur arrive au point de contact, il saisit l'un de ces rayons, et voit le ☉ dès que sa position est convenable.

Si c'était le ☉ qui tournait autour de la Terre, en 24^h, il en serait autrement. Car $7^m 17^s = \frac{1}{168}$ de 24^h : ce qui ferait que nous le verrions environ 2° plus à l'occident l'orient de sa position.

Vous voyez donc qu'il y a une très grande différence entre les deux hypothèses. Si c'est la Terre qui tourne, il n'y a aucune illusion. — Quelle est la vérité ? Il y a moyen de trancher la question. — On pourrait croire que l'avance vers l'occident étant constante, il n'y a pas moyen de la constater. Mais il en résulterait que la courbe apparente du ☉ ne serait pas plane, et nous avons là une preuve de la rotation de la Terre.

214. Supposons maintenant un astre immobile, et la Terre décrivant 7 lieues par seconde. Considérons la Terre en T quand elle reçoit un rayon venu de l'Etoile. Ce rayon est parti depuis longtemps. Malgré cela, si la Terre était immobile, nous verrions l'Etoile suivant TE. Mais la Terre se meut, et l'Etoile paraît un peu plus basse, ~~ou~~ rapprochée sur le mouvement de la Terre de 20" ½, quand l'Etoile est au Pôle. — Plus elle est près de l'Equateur, moins elle est abaissée.

Ellipse d'aberration.

215. Ainsi, les Etoiles se déplacent par 3 causes : Précession, Nutation, aberration.

Enfin, pour les Etoiles très-voisines, il y a une 4e cause tenant au mouvement de la Terre : c'est un effet de Parallaxe annuelle, qui n'a lieu que pour peu d'Etoiles (61e du Cygne), et paraît faire décrire une autre Ellipse, qu'on ne peut confondre avec celle d'aberration, car la Loi est différente : le déplacement est parallèle à la ligne qui irait de la Terre au Soleil.

216. Ces phénomènes ont été étudiés par Bradley en 1720. On ne connaissait que la Précession, et la vitesse de la Lumière depuis 1700. Mais non la nutation ni la parallaxe annuelle. Bradley chercha la Parallaxe. Il fit des observations très-précises, et, dès la 1re année, observa que les Etoiles n'étaient pas fixes. Tout d'abord il crut avoir mis la main sur la parallaxe annuelle. Mais il reconnut que le phénomène avait lieu parallèlement à la vitesse de la Terre, tandis que, si c'eût été un effet de parallaxe, le déplacement eût été perp. à cette vitesse. — Il trouva la loi de l'aberration, et l'expliqua.

Bradley continua ses observations pour voir s'il ne pourrait déterminer la parallaxe annuelle. — Et, après 20 ans de recherches, il découvrit les petites Ellipses de Nutation. 1744.

Il ne trouva pas de parallaxe. Ses Instruments n'étaient pas assez exacts. Ce fut Bessel qui y arriva.

---

216. Je ne parlerai pas des Satellites de Saturne. — Leurs lois sont les mêmes que pour ceux de Jupiter.

Nous avons parlé de l'anneau. — Nous avons dit qu'il devait avoir une vitesse de Rotation égale à la vitesse de translation d'un Satellite placé à la même distance. — On conçoit que le calcul puisse être fait. Car on peut calculer la Gravité en un point de l'anneau, et déterminer la vitesse de circulation pour que la force centrifuge fasse Equilibre à l'attraction. Puis, on vérifie par la 3e loi de Kepler.

C'est ce qui a fait penser que l'anneau est un amas de Satellites.

217. Uranus a quatre Satellites certainement. — L'un d'eux a une orbite dont le plan est perp. sur celui de l'Ecliptique. — C'est le seul exemple connu.

Mlg.

astronomie.

Cours de Mr. Puiseux.

(Ecole Normale, 1851)

H. Baudrit

Des Instruments astronomiques.

Lunette Méridienne.

Elle consiste dans une Lunette astronomique de 2 ou 3^m de longueur, munie d'un Réticule, et mobile dans le plan Méridien.

Suspension.

Lampe pour éclairer les fils micrométriques dans les observations de nuit.

1re Condition. — L'axe optique doit être rigoureusement perp. à l'axe de Rotation, et parfaitement horizontal.

Pour obtenir et vérifier à chaque instant l'horizontalité de l'axe de Rotation, on suspend un niveau à bulle d'~~air~~ aux deux tourillons, et, l'un des points d'appui restant fixe, on fait mouvoir l'autre au moyen d'une vis de Rappel. — On vérifie le niveau en le retournant.

Quelques soins que l'artiste apporte à la construction de la Lunette, il est à peu-près impossible que l'axe optique soit perp. à l'axe de Rotation. — Pour corriger le défaut, on vise une mire fixe. Puis on retourne la Lunette de manière que les points d'appui changent de coussinets, et l'on regarde si la mire est de nouveau cachée par les fils croisés du Réticule. Si l'axe optique est parfaitement perp. à l'axe de Rotation, cette coïncidence doit avoir lieu de nouveau. Si elle n'a pas lieu, on fait mouvoir le Réticule avec une petite vis de manière que le nouvel axe optique soit la Bissectrice de l'angle des deux précédents. On recommence jusqu'à ce qu'on soit parvenu par un tâtonnement plus ou moins long à obtenir par le retournement une coïncidence parfaite.

2e Condition. — L'un des fils du Réticule doit être horizontal.

On y arrive par des signaux placés à la même hauteur.

Cherchons avec cet instrument le plan méridien.

On observe à cet effet une étoile dont on puisse voir la Révolution tout entière. Elle passera toujours dans le plan méridien deux fois. — On doit trouver le même intervalle de temps entre le passage Supérieur et le passage Inférieur qu'entre celui-ci et le passage Supérieur suivant. — On dirige à peu-près la Lunette dans le plan proposé, et l'on note l'heure :

h	pour	1er	pass.	Sup.
h'	"		"	Inf.
h''	p^r	2^e	"	Sup.

et l'on regarde si l'on a

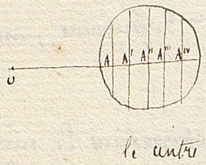
$$h' - h = h'' - h'.$$

Si cette condition est satisfaite, on a le plan méridien. — Sinon, à l'aide d'une vis, on change un peu un tourillon, et l'on tâtonne.

Pour retrouver la direction de la méridienne en cas de qq. dérangement dans la lunette, on place à une très grande distance une mire fixe. – Celle de l'observatoire de Paris est près d'Arcueil.

La lunette méridienne sert à déterminer le passage au méridien ; et aussi la durée du jour sidéral.

Nous avons dit qu'au foyer de l'objectif, on disposait deux fils en croix. Dans la pratique, on en prend six. L'un d'eux est horizontal, les autres verticaux, et divisent en parties égales le diamètre horizontal. – Quand on observe le passage d'une étoile au méridien, on lui fait suivre de très près le fil horizontal, et l'on marque l'heure où elle est occultée par chacun des fils verticaux. C'est la moyenne de ces heures que l'on prend pour l'heure du passage de l'étoile au méridien. Cette moyenne donne l'époque du passage de l'astre à un fil fictif dont le pied A_1 serait



le centre des moyennes distances de A, A', A'', A''', A^{IV}, à un point o situé sur le fil horizontal. On a en effet les équations :

$t_2 = t_1 +$ le temps employé à parcourir AA', c.à.d. $\frac{a_2 - a_1}{v}$ (v est la vitesse de l'astre) :

$$t_2 = t_1 + \frac{a_2 - a_1}{v}$$

De même

$$t_3 = t_1 + \frac{a_3 - a_1}{v}$$

$$t_4 = t_1 + \frac{a_4 - a_1}{v}$$

$$t_5 = t_1 + \frac{a_5 - a_1}{v}$$

Si l'on ajoute

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 5t_1 + \frac{a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - 4a_1}{v}$$

D'où

$$T = \frac{t_1 + t_2 + \dots t_5}{5} = t_1 + \frac{a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - 4a_1}{5v}$$

Appelons x la distance du point o à un certain point A_1 du diamètre, tel que l'astre passe en ce point juste à l'instant T. On aura l'équation (a_1 désignant OA_1)

$$T = t_1 + \frac{x - a_1}{v}$$

Égalant ces deux valeurs de T

$$\frac{x - a_1}{v} = \frac{a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - 4a_1}{5v} \qquad x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5}$$

Donc le point A_1 est le centre des moyennes distances de A, A', A'', A''', A^{IV}.

L'on entend donc par axe optique d'une lunette méridienne la ligne qui joint le centre optique de l'oculaire au point fictif que nous venons de déterminer.

Par cette méthode, les erreurs se détruisent, et la précision peut aller jusqu'à $\frac{1}{10}$ de seconde.

Cercle Mural.

Le But du Mural est de déterminer les distances zénithales.

Cet instrument se compose d'un cercle vertical, mobile autour d'un axe horizontal fixé solidement dans un mur : delà le nom de Mural.

Le plan de ce cercle doit être rendu parallèle à celui du Méridien.

Le cercle porte en son centre une Lunette qu'il emporte avec lui en tournant autour de son axe. — Cette Lunette porte au foyer de l'objectif deux fils croisés dont l'un est horizontal.

L'axe optique de la Lunette doit être rigoureusement parallèle au plan du cercle.

Pour noter la distance angulaire dont ce cercle tourne autour de son axe, on a disposé un anneau qui l'emboîte exactement, de sorte que le bord extérieur du cercle glisse à frottement sur le bord intérieur de l'anneau. — Cet anneau, qui est fixe, porte plusieurs repères, dont la comparaison avec les divisions du cercle montre de combien le cercle a marché. — Pour apprécier avec plus d'exactitude les divisions qui se correspondent, chaque repère est muni d'un vernier qu'on observe à l'aide d'un microscope fixé à la muraille.

Le cercle mural doit avoir de grandes dimensions afin que la division de la circonférence puisse être poussée très-loin. — Mais comme la tendance qu'a l'instrument à se déformer ou à se déplacer augmente avec son poids, et par conséquent avec ses dimensions, on comprend quelles précautions il faut prendre pour le fixer bien solidement.

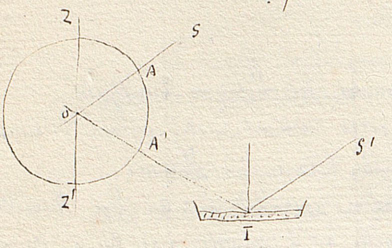
Nous allons avec cet instrument observer les distances zénithales des Etoiles.

Supposons qu'on ait déterminé à quelle division du Limbe correspond le zéro du vernier lorsque la Lunette est parfaitement verticale. Soit m cette division (m pouvant être fractionnaire). Si maintenant nous voulons observer une Etoile à son passage dans le plan du méridien, nous serons obligés de faire tourner la Lunette d'un certain angle z égale à la distance zénithale de l'Etoile. Le zéro du vernier correspondra alors à la division $m+z$ du Limbe. Si donc, une fois pour toutes, le nombre m qu'on désigne par Erreur de Collimation ou Erreur de l'Index était connu, pour avoir la distance zénithale d'une Etoile, il suffirait de diriger la Lunette vers cet astre à l'instant de son passage dans le méridien, de noter la division du Limbe qui correspond au zéro du vernier, et, en en retranchant la constante m, on aurait la distance zénithale.

Ainsi, la première chose à faire pour se servir de l'instrument, c'est de déterminer l'erreur m de collimation. — Cette quantité serait facile à trouver, si l'on savait déjà par des observations antérieures qu'une Etoile connue passe à tel instant juste au Zénith. Car il suffirait de diriger la Lunette vers cet astre, et de lire pour cette position du Limbe à quelle position correspond le zéro du vernier. — Mais, comme nous ne voulons supposer aucune connaissance préliminaire, nous indiquerons le moyen suivant, qui est d'ailleurs employé dans les observatoires.

On dirige la Lunette vers une certaine Etoile. Soit n la direction indiquée par l'instrument. — On a disposé auprès une cuvette pleine de

mercure qui forme une surface horizontale réfléchissante. — On tourne alors la lunette de manière à apercevoir l'image par réflexion dans le mercure. Soit n' la division à laquelle correspond le zéro du vernier. — Dans la première observation



$ZOA' = 180° - Z'OA' = 180 - Z$

on a

$$n = m + Z$$

m désignant l'erreur de collimation, et Z la distance zénithale de l'Étoile.

Dans la seconde, on a

$$n' = m + 180° - Z$$

ajoutant

$$m = \frac{n + n'}{2} - 90°$$

La méthode que nous venons d'indiquer peut souffrir une objection. La voici. Pendant le temps que demandent les deux observations, l'Étoile s'est déplacée, en sorte que ce n'est pas l'image du point primitif qu'on observe, c'est celle d'un autre point, et l'on n'a plus 180° − Z pour distance observée, mais 180° − Z'. — On évite cet inconvénient en observant l'Étoile directement un peu avant qu'elle ne passe au méridien, et son image un peu après qu'elle y a passé. Alors, on voit facilement que si l'Étoile a passé au méridien juste à l'instant milieu entre les époques des deux observations, les erreurs de sens contraires se détruisent. — D'ailleurs cette cause d'erreur est à peu près insensible, car il faut remarquer que la distance zénithale de l'Étoile est un maximum lorsqu'elle passe dans le méridien, et l'on sait qu'aux environs d'un maximum, les variations sont presque insensibles.

Dans les grands cercles muraux des observatoires, on emploie jusqu'à six vernis, et voici dans quel but. Malgré les soins extrêmes apportés par l'artiste dans la confection d'un mural de grandes dimensions, il est impossible qu'il y ait une conformité absolue dans la division : en certains points d'ailleurs se trouvent des défauts inhérents à la matière même de l'instrument. Si donc on fait porter les lectures non pas sur un seul point du limbe, mais sur plusieurs points à la fois, il y a plus de probabilité pour qu'on ait des résultats exacts. — Chaque repère est muni d'un vernier sur lequel on lit à l'aide d'un microscope fixé à la muraille.

Il est facile avec ces six verniers comme avec un seul, d'observer la distance zénithale d'une Étoile. — Supposons que la lunette soit parfaitement verticale, et lisons les indications

$$m_1 \quad m_2 \quad m_3 \quad m_4 \quad m_5 \quad m_6,$$

fournies par les six verniers. — La quantité

$$\frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6}{6}$$

est ce qu'on prend pour erreur de collimation. — On la trouvera par le même procédé qu'on suit pour un seul vernier. — En effet, j'appelle

$$n_1 \quad n_2 \quad n_3 \quad n_4 \quad n_5 \quad n_6$$

les indications fournies par les six verniers lorsqu'on vise directement une Étoile, et

$$n'_1 \quad n'_2 \quad n'_3 \quad n'_4 \quad n'_5 \quad n'_6$$

celles qu'ils donnent quand on vise son image. On aura les équations :

$$\begin{array}{lcl} n_1 = m_1 + z & & n'_1 = m_1 + 180 - z \\ n_2 = m_2 + z & & n'_2 = m_2 + 180 - z \\ n_3 = m_3 + z & \text{et} & n'_3 = m_3 + 180 - z \\ n_4 = m_4 + z & & n'_4 = m_4 + 180 - z \\ n_5 = m_5 + z & & n'_5 = m_5 + 180 - z \\ n_6 = m_6 + z & & n'_6 = m_6 + 180 - z \end{array}$$

D'où

$$\frac{n_1 + n'_1 + n_2 + n'_2 + n_3 + n'_3 + \cdots + n_6 + n'_6}{12} = 90^\circ + \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_6}{6}$$

Maintenant pour trouver la distance zénithale d'un astre, on l'observera au moment de son passage au méridien, et l'on prendra la moyenne des observations des 6 verniers. Chacun d'eux a tourné d'un angle Z, par conségt. le nombre qu'on lira vis-à-vis le zéro du 1er vernier sera $m_1 + z$; au 2e vernier, $m_2 + z$, ... La somme de toutes ces lectures divisée par 6 sera donc $m + Z$, m désignant l'erreur de collimation calculée une fois pour toutes. En la retranchant donc de la moyenne des 6 observations, on aura Z.

Parlons maintenant des conditions que l'instrument doit remplir pour que ses indications soient bien exactes.

1°. Il faut que l'axe du cercle soit bien perp. sur son plan, et en outre, que le mural soit vertical. – Les artistes ont des méthodes très-précises pour s'assurer qu'un axe est perp. à un plan. Tout revient donc à placer le mural bien verticalement. à cet effet, on fixe aux deux extrémités d'un diamètre du cercle deux pointes sur lesquelles on trace deux traits, et l'on s'assure au comparateur que la hauteur de ces deux traits au-dessus du plan du limbe est bien la même pour les deux pointes, de sorte que la ligne qui les joint est exactement parallèle au plan du limbe. Puis, on s'arrange de manière que le diam. qui les contient soit sensiblement vertical: et, si le limbe a bien la position demandée, un fil à plomb doit passer par les deux traits. Réciproquement. si cette condition est remplie, le limbe est bien vertical (Emploi du bain de Mercure).

2°. Il faut s'assurer que le plan de ce cercle coïncide avec celui du méridien du lieu, et que l'axe optique de la lunette est parallèle au plan du limbe. – voici comment. à l'heure précise où t une étoile passe à la lunette méridienne, il faut qu'on l'aperçoive à la lunette du mural, et qu'il en soit de même pour une seconde étoile. Si cette condition n'est pas remplie, il suffit de déranger un peu les fils du réticule par un mouvement de vis: car on a pris les précautions nécessaires pour que la lunette soit à très-peu-près réglée.

Je dis que, du moment qu'on a aperçu deux étoiles au même instant dans la lunette méridienne et dans celle du mural, on est bien sûr que son axe optique décrit un plan parallèle à celui du méridien. – En effet, l'axe optique ne peut que décrire un cône autour de l'axe du cercle, et ce cône est symétrique par rapport au plan horizontal qui passe par son sommet. Or il arrive que deux des génératrices de ce cône situées au-dessus du plan horizontal sont dans le plan du méridien: à cause de la symétrie, il doit y en avoir aussi deux au-dessous. – Donc le prétendu cône

a quatre Génératrices dans un plan. Donc il est lui-même un plan. — Les deux étoiles qu'il faut observer doivent être assez distantes l'une de l'autre.

Avec cet instrument, on constate que la distance zénithale du pôle reste la même d'un jour à l'autre, et qu'elle est invariable, quelle que soit d'ailleurs l'étoile dont on s'est servi pour la déterminer.

Si l'on fait cette observation à Paris, on trouve

41° 9′ 47″

on en conclut pour la hauteur du pôle

48° 50′ 13″

En procédant sans précautions, on trouverait pour les distances zénithales du pôle calculées d'après celles de plusieurs étoiles des nombres notablement différents. Cela tient à ce que nous n'observons que les distances zénithales apparentes, et que nos observations doivent être corrigées des effets de la réfraction astronomique. Nous reviendrons plus tard sur ce point. — En faisant cette correction, nous ne faisons pas de cercle vicieux : car s'il est vrai que les premières tables de réfraction atmosphérique ont été faites d'après les différences observées entre les résultats précédents, on peut aussi former ces tables sans connaissances astronomiques préalables, en se servant seulement du baromètre et du thermomètre.

Cercle entier.

Pour achever la vérification des lois du mouvement de Rotation de la Sphère céleste autour d'un axe, il ne nous reste plus qu'à considérer une Etoile à un instant quelconque de sa course, et de vérifier qu'elle est bien dans la position qu'elle doit avoir d'après la loi de Rotation uniforme.

Cette vérification se fait au moyen d'un Instrument appelé Cercle entier, et qui existe à l'observatoire de Palerme. — Il se compose d'une Lunette fixée à un Limbe vertical, mobile lui-même autour d'un axe vertical, de façon que ce cercle vertical et la Lunette qu'il emporte avec lui ont deux mouvements : l'un autour d'un axe horizontal, et pendant que leur plan vertical reste toujours le même ; l'autre autour d'un axe vertical, de manière à pouvoir correspondre successivement à toutes les parties de l'horizon.

Afin de pouvoir juger de combien l'axe vertical du cercle a tourné, on a adapté à sa partie inférieure un cercle horizontal qu'il emporte avec lui dans son mouvement.

Le cercle vertical est muni d'un anneau fixé à l'axe vertical, et dans lequel ce cercle peut glisser. Cet anneau porte un vernier qui permet d'apprécier avec une grande exactitude l'angle dont la Lunette a tourné dans un même plan vertical.

Le cercle horizontal aussi est enchâssé dans un anneau fixe muni d'un Repère faisant vernier sur les divisions du cercle.

Supposons que nous voulions connaître la position d'un astre à un instant donné. Nous dirigerons la Lunette vers cet astre, ce qui est toujours possible, à cause des deux mouvements que possède l'instrument, et nous lirons les indications des deux verniers. — On sait à quelle division du Limbe vertical correspond le Zéro du vernier quand la Lunette est dirigée précisément au Zénith ; (l'opération qui donne cette division est la même que pour le Mural) On sait en outre quelle est la l'indication du vernier horizontal quand le plan du Cercle entier se trouve être celui du méridien : car il est facile de faire coïncider ces deux plans en s'assurant qu'une même Etoile est vue au même instant à la Lunette méridienne et à celle du cercle.

Comparant maintenant ces deux nombres, obtenus une fois pour toutes, avec les indications de l'instrument pour chaque étoile observée, on en conclut la distance Zénithale de l'étoile, et l'angle du plan vertical où elle se trouve avec le plan Méridien, c.à.d. l'azimuth. Ces deux distances angulaires sont les coordonnées de l'Etoile, et en fixent parfaitement les positions sur la sphère céleste.

Nous allons indiquer quelques précautions à prendre pour que les indications de cet Instrument soient exactes.

1°. Le plan du cercle entier doit être vertical. On s'en assure de même que pour le Mural, avec deux pointes et le fil à plomb.

2°. L'axe qui le supporte doit être vertical. — Pour cela, après s'être assuré que le cercle l'est, on fait tourner l'instrument autour de cet axe, et dans ce mouvement, le cercle doit toujours rester vertical. — Je dis que

si cette condition est remplie, l'axe est vertical. — En effet, une ligne (le fil à plomb) qui est verticale, et qui demeure verticale en tournant autour d'un axe, ne peut tourner qu'autour d'un axe vertical.

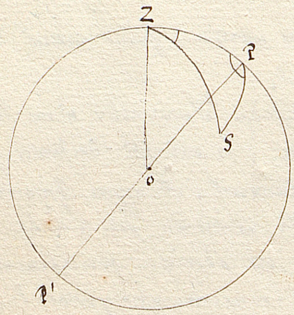
3°. L'horizontalité du second cercle est aussi nécessaire, et se constate avec le niveau. Mais cette condition est toujours remplie par l'instrument si la précédente l'est, parce que les artistes ont des moyens très-précis d'assembler un axe et un plan qui lui soit perpendiculaire.

4°. L'axe optique de la lunette doit être exactement parallèle au plan du limbe.

Pour s'en assurer, on place la lunette bien horizontalement, et l'on vise une mire très-éloignée (non pas une étoile, qui est mobile); puis on fait tourner l'instrument de 180° autour de son axe vertical, et de 180° aussi autour de son axe horizontal; on doit pouvoir viser de nouveau la mire si l'appareil est bien construit. — Sinon, les deux positions de l'axe optique forment un angle double de celui qu'il fait avec le limbe. — On peut donc déplacer convenablement le réticule.

Voyons maintenant le parti que nous allons tirer des indications de cet instrument pour vérifier l'uniformité du mouvement des étoiles.

Soit O le centre de la sphère céleste, PP' son axe, S une étoile et Z le zénith. — L'angle SZP du triangle sphérique ZPS est égal à l'azimuth : nous le connaissons par conséquent. Le côté ZS, c'est la distance zénithale de l'étoile, et elle s'obtient avec le cercle entier.



Nous allons calculer maintenant ces quantités au moyen d'autres éléments que nous connaissons et en nous appuyant sur l'uniformité du mouvement; si donc le résultat du calcul coïncide avec les données de l'expérience, nous aurons vérifié l'hypothèse du mouvement uniforme des étoiles.

L'angle ZPS est facile à trouver. En effet, soit h le temps qui s'est écoulé depuis le passage de l'étoile au méridien jusqu'au moment où on l'observe. Alors on posera la proportion fondée sur l'uniformité supposée du mouvement :

$$h : 24 :: ZPS : 2\pi$$

d'où

$$ZPS = \frac{h\pi}{12}$$

Le côté ZP est connu, c'est la distance zénithale du pole. — Il en est de même du côté SP : c'est la distance polaire de l'étoile, qu'on a pu observer au mural quand l'étoile était dans le méridien. — Au moyen de ces trois données, on peut calculer SZP, ZS, et procéder ainsi à la vérification dont il s'agit.

Si l'on observe un grand nombre de jours, on trouve une différence entre le calcul et l'observation. — Nous en verrons les causes.

Equatorial.

Ce nouvel instrument permet aussi de vérifier la loi d'uniformité dans le mouvement des astres. — Il se compose d'un axe auquel on peut donner différentes directions, et qui doit, quand on se sert de l'instrument, être dirigé suivant l'axe du monde. — Cet axe porte deux cercles divisés. L'un est fixé le long de l'axe, et est emporté avec lui dans sa rotation : il porte en son centre une lunette munie d'un vernier, qui peut tourner autour d'un 2^d. axe perp. au 1er, et parcourir successivement toute la circonférence. — L'autre est perp. à l'axe, et entraîné aussi par ce dernier dans son mouvement. Il est parfaitement divisé, et se meut dans une couronne qui est munie de verniers. De cette façon, on peut apprécier avec une grande exactitude l'angle dont l'axe a tourné.

Supposons que l'axe ab de l'instrument coïncide avec l'axe de la sphère céleste, et que la lunette ait été dirigée vers une étoile S. Si l'on fait tourner l'axe ab sur lui-même de 360°, alors le rayon visuel décrira un cône dont l'intersection avec la sphère céleste sera précisément le petit cercle que doit décrire l'étoile S dans l'hypothèse du mouvement de rotation des étoiles autour de l'axe du monde. — Or, en tournant d'un mouvement uniforme et convenable l'axe ab, on aperçoit toujours l'étoile dans la lunette. Donc l'étoile décrit bien un petit cercle sur la sphère. — Pour donner à l'axe ab le mouvement uniforme et convenable dont nous venons de parler, il n'y a qu'à disposer un mouvement d'horlogerie qui fasse faire à ab une révolution dans 24^h. On voit par là que le mouvement uniforme des étoiles a lieu à raison de 15° par heure.

Cette vérification n'est que grossière, car il faut tenir compte des effets de la réfraction. Aussi l'instrument que nous venons de décrire a-t-il été construit dans un autre but. On s'en sert pour suivre commodément un astre dont le disque a une certaine grandeur apparente et présente des particularités que l'on veut étudier. Ainsi par exemple, quand on veut faire une carte de la Lune, et qu'avec une lunette ordinaire il serait incommode de déranger à chaque instant l'instrument pour suivre l'astre, on se sert de la machine ci-dessus. — Dans ces observations, on se sert d'une lunette qui porte des fils rectangulaires au foyer de l'objectif. Ces fils peuvent être rapprochés les uns des autres au moyen d'une vis micrométrique, et l'on peut lire sur la tête de la vis de combien on les a rapprochés ou éloignés. — On peut ainsi connaître la distance angulaire de deux points de l'objet que l'on étudie. — En effet, on fait coïncider les deux points avec deux fils de la lunette, puis on les rapproche au moyen de la vis micrométrique jusqu'à coïncidence. On sait de combien on les a rapprochés; on connaît aussi le grossissement de la lunette. De là on conclura facilem^t. la distance angulaire cherchée.

Une lunette semblable à la précédente peut servir aussi à suivre une comète dans tout son cours, et à déterminer sa marche dans le ciel : à cet effet, d'heure en heure, on cherche sa distance à différentes étoiles fixes, en employant la méthode qui vient d'être indiquée.

L'instrument que nous venons de décrire s'appelle Equatorial parce que, dans sa position normale, le grand cercle perp. à l'axe est le plan même de l'Equateur céleste. — On lui donne aussi quelquefois le nom de Machine Parallactique, parce que la lunette, pendant la rotation de l'axe, décrit un parallèle sur la sphère céleste.

Définitions.

On appelle Plan horaire le plan qui passe par l'axe du monde et un astre.

Le cercle suivant lequel ce plan coupe la sphère céleste a reçu le nom de Cercle horaire.

L'angle du plan horaire avec le Méridien se nomme angle Horaire, et il varie à raison de 15°. à l'heure.

L'angle des plans horaires de deux étoiles est constant.

Ascension droite.

Déclinaison.

Problème :

Trouver l'R et la D. d'une étoile.

Globes et Cartes.

Constellations.

Méthode des alignements.

Il est essentiel de déterminer avec une grande précision les distances zénithales des étoiles qui passent près du zénith, et, comme dans cette portion du ciel les effets de la réfraction sont nuls, cette grande précision n'est pas inutile. Il n'en est pas de même dans les autres parties du ciel, car les corrections de réfraction ne sont connues qu'avec une certaine approximation, et il serait inutile que les observations en donnassent une plus grande.

On se sert alors de l'instrument suivant.

Secteur Zénithal.

Le Secteur Zénithal est un Secteur d'un petit nombre de degrés et d'un grand rayon mobile autour d'un axe vertical. Cet arc est gradué en degrés, minutes, secondes et fractions de secondes. Une Lunette mobile autour du centre de ce Secteur est munie d'un repère avec vernier qui glisse sur les divisions du cercle, et permet d'apprécier très-exactement le déplacement de la Lunette.

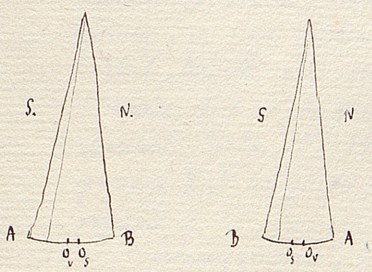
1°. Le Limbe doit être vertical. – on s'en assure au fil à plomb par la méthode très-précise indiquée déjà pour le Mural et le cercle entier.

2°. L'axe de rotation doit être aussi vertical. – voir le cercle entier.

3°. L'axe optique doit être parallèle au plan du Limbe. Pour cela, on vise une Etoile juste au moment où elle passe au Zénith du cercle mural. on doit l'apercevoir dans la Lunette du Secteur: si cela est, l'axe optique est vertical, donc parallèle au plan du Limbe. – Il est évident dès lors que dans toutes les positions que prendra le Limbe, le même parallélisme aura lieu, puisque l'axe de rotation est supposé bien vertical.

Lorsque ces conditions sont remplies, il est bien évident que si le zéro du vernier coïncidait juste avec le zéro de l'instrument quand la Lunette est verticale, il suffirait pour avoir la distance Zénithale d'une Etoile de lire la division du Limbe à laquelle correspond le zéro du vernier dans la nouvelle position de la Lunette. Mais cette coïncidence serait l'effet du hasard, et jamais elle n'a lieu. on est obligé de calculer encore ici l'erreur de Collimation.

Supposons que le point où s'arrêterait le 0 du vernier quand la Lunette est verticale soit à gauche du zéro de la division du Secteur. alors, quand on visera une étoile située vers le N. l'angle observé sera la distance zénithale de l'étoile augmentée de α



$$z = Z + \alpha$$

Retournons l'instrument de 180°. alors, la Lunette changera de place, et l'on aura évidemment

$$z' = Z - \alpha$$

d'où

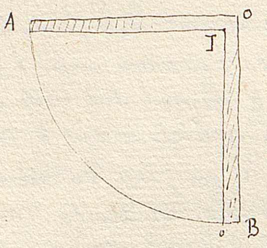
$$\alpha = \frac{z+z'}{2}$$

α étant déterminé une fois pour toutes, quand on observera une Etoile vers le N. il faudra retrancher α de la lecture faite sur l'instrument, et quand l'Etoile sera vers le S. il faudra ajouter α.

Si c'est précisément dans le plan du méridien qu'on veut observer la distance Zénithale, il faut s'assurer que le plan du Secteur coïncide bien avec ce plan, et, pour cela, on doit apercevoir une Etoile à la Lunette du Secteur juste au même instant que dans la Lunette méridienne.

Quart de Cercle Mural.

On remplace quelquefois le mural par un autre instrument appelé Quadrant qui n'en diffère qu'en ce que le cercle est remplacé par un seul quadrant, et que la lunette est mobile indépendamment du limbe. Cette lunette porte un vernier avec lequel on lit les degrés, minutes,... dont elle a marché sur le limbe.



L'instrument doit être placé de manière que le point I, centre de cette division, et le point zéro de cette division soient sur une même verticale. À cet effet, l'artiste marque une ligne OB très voisine de IO et bien parallèle. Il suspend en O un fil à plomb très fin qui doit toujours venir battre sur le point B finement marqué sur le limbe. On s'en assure au microscope avant et après les observations.

Dans cet instrument, il y a encore à calculer une erreur de collimation. Nous ne pouvons pas la déterminer en retournant le quart de cercle mural, puisqu'il est fixe. Mais on compare ses indications avec celles du secteur zénithal, qui donne la dist. zénithale d'une étoile.

Quart de Cercle.

Cet Instrument est portatif. Il se compose d'un quart de cercle. autour de son centre se meut une Lunette munie d'un Vernier. Le quart de cercle est porté sur un axe fixé à un pied à 3 branches et à vis calantes, et autour duquel il peut tourner.

au moyen des vis, on rend l'axe vertical. — On s'assure que le Limbe et l'axe sont verticaux par les moyens déjà indiqués.

L'axe optique doit être parallèle au plan du Limbe, et l'on s'en assure en voyant si l'on peut observer le passage d'une Etoile au point de croisement des fils de la Lunette au même moment qu'au point de croisem^t. des fils de la Lunette méridienne, et cela, pour deux Etoiles aussi éloignées que possible.

Quant à l'Erreur de Collimation, elle peut se déterminer par le Retournement. — Pour cela, le Limbe de l'instrument est un peu plus grand que 90°: et l'on vise une Etoile près du Zénith.

Un pareil Instrument peut être employé pour déterminer l'heure du passage d'une Etoile au méridien.

Imaginons qu'on ait observé une belle Etoile à une distance considérable à l'E. du méridien, en la faisant coïncider avec l'intersection des fils de la Lunette. — Dans cette position, on fixera soigneusement la Lunette sur le Limbe vertical, et l'on notera l'heure. — Lorsque l'Etoile aura passé par le méridien, et qu'elle sera dans la période descendante de sa course, on fera tourner l'instrument de l'E. à l'O. sans rendre à la Lunette sa liberté, jusqu'à ce que l'astre reparaisse dans le champ de la Lunette, et l'on continuera ce mouvement autour de l'axe jusqu'à ce que l'Etoile coïncide avec l'intersection des fils. — on note l'heure. — Dans ce cas, l'Etoile sera à la même hauteur du côté de l'Ouest qu'où elle était au moment de la 1ère. observation du côté de l'Est. — Donc l'heure du passage de l'Etoile au méridien est égale à la demi-somme des heures observées.

Réciproquement, l'erreur du Chronomètre peut être observée par ce moyen.

Si le quart de cercle était muni d'un quart de cercle perp. à l'axe qui pût indiquer les angles dont tourne l'axe, on aurait facilement par cette méthode les points N. et S. de ce cercle horizontal, et l'on tracerait la Méridienne.

C'est la Méthode des Hauteurs égales ou des Hauteurs Correspondantes.

Nous allons décrire maintenant les Instruments portatifs qui servent non seulement aux observations astronomiques proprement dites, mais encore aux opérations Géodésiques.

Cercle Répétiteur.

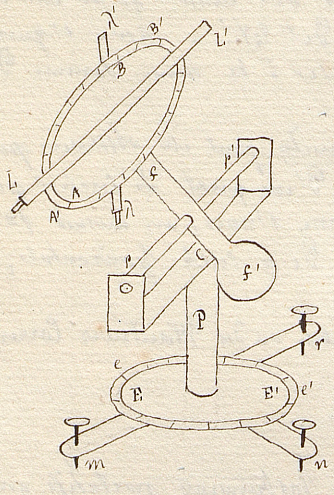
Le Cercle Répétiteur s'emploie principalement à deux usages :
1°. Rechercher la distance zénithale des étoiles.
2°. Trouver l'angle compris entre les rayons visuels dirigés vers deux objets donnés.

En général, quand on veut mesurer l'angle de deux rayons visuels, on se sert d'un cercle divisé muni d'une lunette mobile autour de son centre, et dont le plan peut occuper toutes les positions possibles. On dirige la lunette successivement vers les deux points, et l'on déduit l'angle cherché de l'arc parcouru sur le limbe.

Mais ce qui fait le mérite de l'instrument dont nous allons parler et sa grande exactitude, c'est de pouvoir se prêter à une méthode par laquelle on obtient non pas l'angle cherché, mais un multiple quelconque de cet angle sans qu'on ait pour cela plus d'erreurs à craindre dans la lecture des divisions que si l'on mesurait l'angle simple.

Si donc α désigne la limite de l'erreur à craindre dans la lecture d'une division, et si au lieu de l'angle A lui-même, on mesure l'angle nA, l'erreur sera au plus égale à $\frac{\alpha}{n}$, et l'on atténuera autant qu'on voudra l'erreur provenant de la lecture. — Or l'avantage des grands instruments des observatoires fixes vient de leurs grandes dimensions qui permettent d'obtenir dans la lecture une approximation plus grande qu'avec des instruments de dimensions moindres. — Mais le cercle Répétiteur permettant d'apprécier d'atténuer autant qu'on veut les erreurs de lecture, est supérieur, sous ce point de vue, aux grands instruments eux-mêmes.

Il fut inventé à la fin du siècle dernier par Borda.



Le cercle Répétiteur se compose d'un cercle AB mobile autour d'un axe ff' perp. à son plan. Il est enchâssé dans un anneau A'B' gradué dans toute son étendue, et porte lui-même un ou plusieurs verniers qui servent à indiquer l'amplitude de l'arc décrit. Le cercle AB porte une lunette LL' qui se meut avec lui, et, au-dessous de ce cercle, se trouve une seconde lunette λλ' qui est mobile aussi autour de ff', mais qui est indépendante des mouvements du 1er. cercle. À cet effet, elle est attachée à un anneau qui peut tourner autour de ff'. De cette manière, elle est excentrique par rapport au limbe AB : mais on n'a besoin de tenir compte de cette excentricité que dans des circonstances assez rares. Nous en reparlerons d'ailleurs. — Cependant on peut faire tourner le cercle et les deux lunettes autour de ff' à l'aide d'une disposition particulière. — Enfin, l'axe ff' est traversé par un essieu mobile autour d'un axe horizontal pp', lequel repose sur

un pied vertical P qui porte un cercle divisé EE'. – Tout l'appareil est mobile autour de l'axe P, qui repose lui-même sur 3 pieds munis de vis calantes m, n, r. Le cercle E E' est mobile dans un anneau ee', de sorte qu'on peut lire de combien de divisions a tourné l'appareil.

Tous les mouvements que possède cet appareil sont produits ou arrêtés au moyen de vis de pression munies de vis de rappel destinées à produire des mouvements très-lents.

Remarquons que le cercle AB peut être amené dans une position qcq. à l'aide des deux mouvements rectangulaires qui s'effectuent autour de pp' et de P. En effet, au moyen du premier, on peut incliner le plan sur l'horizon depuis 0 jusqu'à 90°, et, au moyen du second, on peut rendre quelconque sa trace horizontale.

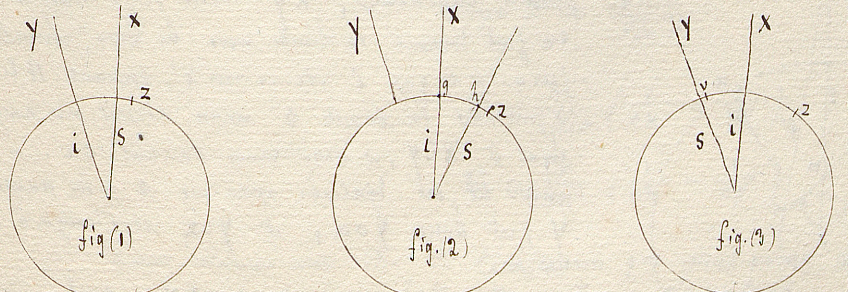
Enfin, on s'est attaché surtout à rendre très-exactes les indications du cercle AB sur l'anneau A'B'. – AB porte 2 verniers munis de microscopes, et de petits réflecteurs pour disperser la lumière sur les divisions et en faciliter la lecture.

Expliquons maintenant comment on se sert de cet instrument pour mesurer l'angle de deux rayons visuels.

Dans ce cas, peu importe que l'axe P soit vertical ou non. – On commence par amener à coïncidence le zéro de l'un des verniers de AB avec le zéro de la division tracée sur A'B'. Puis on amène le plan du limbe à être parallèle à la ligne qui joint les deux points X, Y, ou plutôt, à coïncider avec le plan qui passe par l'œil et les deux points X, Y. On obtient ce résultat par une suite de tâtonnements, et, lorsqu'il est obtenu, on doit pouvoir viser avec la lunette supérieure le point X, et avec la lunette inférieure le point Y. Car les deux axes optiques des lunettes ont été rendus parallèles au plan du limbe. – Si ce parallélisme n'existait pas, l'angle qu'on mesurerait serait la projection de l'angle véritable sur le plan du limbe, et n'en différerait que de α^2, α désignant l'angle du plan du limbe avec celui des rayons visuels.

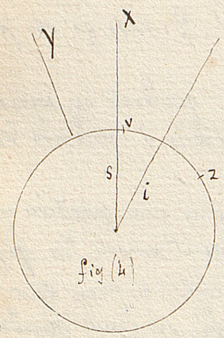
On peut se servir des vis calantes et des mouvements pp' et P pour cette première opération.

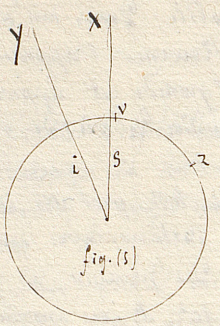
Lorsque cela est fait, la lunette supérieure S visant X, la lunette inférieure i visant Y, le zéro du vernier se trouvant en coïncidence en Z avec le zéro de la graduation ; – on fait tourner le cercle et les deux lunettes autour de l'axe ff' jusqu'à ce que la lunette i soit dirigée vers X. Le point Z n'a pas changé de place relativement à la lunette S. – Enfin, on desserre la vis qui fixait S, et on dirige S vers Y. Alors le zéro v du vernier, qui tout à l'heure coïncidait avec le zéro Z de la division, va être emporté par la lunette supérieure, et se trouvera en V : et

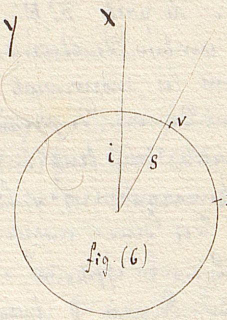


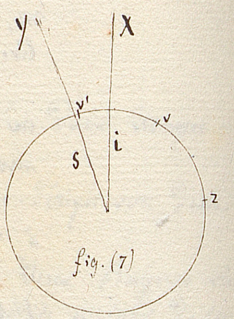
l'arc VZ = 2x, x désignant l'angle à mesurer. Car, dans la position (2), la lunette S a décrit un angle = x, et, dans la position (3), un angle = 2x.

Il est facile maintenant d'avoir un multiple plus élevé. En effet, faisons







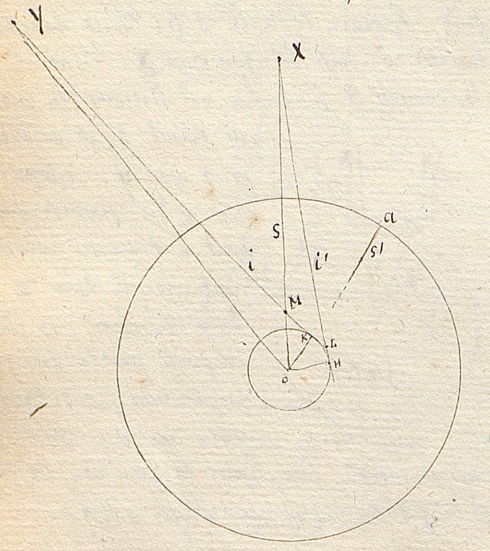


tourner le cercle et les deux lunettes de manière à amener s vers X. fig. (4). Détachons la lunette i de manière à viser Y avec elle, fig. (5), et nous aurons une disposition tout-à-fait analogue à la disposition (1). — On effectue alors les deux opérations (2) et (3). Pour cela, on amène i vers X par un mouvement de rotation autour de ff', puis enfin s vers Y ; fig. (6)(7). De cette manière il est facile de voir que $v'z = 4x$.

On obtiendrait de même un multiple pair quelconque de l'angle.

Il faut remarquer qu'il n'y aura jamais que deux erreurs de lecture d'abord quand on fait coïncider le 0 du vernier avec le zéro de la graduation puis, quand on lit v', ou v'', ou v'''... Lorsqu'on se sert de cet instrument, on fait grossièrement les lectures v', v'', v''',... et on les note afin de se rappeler le multiple où l'on est parvenu. Ce n'est qu'à la lecture correspondante au dernier multiple qu'on apporte beaucoup de soin. — A cet effet, on lit les indications des 4 verniers, et l'on en prend la moyenne. — Il y a aussi des erreurs de pointage. Mais on admet qu'elles ne sont pas toutes dans le même sens, de façon qu'elles se détruisent, et la somme de toutes ces erreurs n'est pas plus grande que celle qui résulterait d'une seule opération.

Lorsque les deux objets X et Y ne sont pas à une grande distance de l'observateur, il y a à faire une correction à cause de l'excentricité de la lunette inférieure. — En effet, cette lunette ne passant pas par le centre o, son axe optique est toujours tangent à une circonférence décrite du point o comme centre avec un certain rayon qu'on déterminera approximativement pour chaque instrument en particulier. — Soit OX la position primitive de la lunette supérieure, KY celle de la lunette inférieure on fait tourner le limbe avec les deux lunettes i et s jusqu'à ce que i vienne en i', suivant HI₁X. Dans ce mouvement la lunette s aura décrit un angle Xoa égal à XI₁Y, et sera venue suivant Oa. — L'angle qu'on lit, est égal à ... après que s a été ramenée à viser Y, est donc Yoa, et YoX est l'angle à mesurer. Or on a



$$Yoa = YoX + Xoa = x + XI_1Y = 2x'$$

car on prendra Yoa pour le double d'un certain angle un peu différent de x, et c'est cette différence

nous allons calculer. — Les deux triangles YMO, XML ont un angle commun en M. Donc

$$Y + YOX = X + YLX$$

D'où

$$YLX = Y - X + YOX = Y - X + x$$

Substituant dans la dernière équation, il vient

$$2x' = 2x + Y - X$$

$$x' = x + \frac{Y-X}{2}$$

$$x = x' + \frac{X-Y}{2}$$

La correction à faire est donc $\frac{X-Y}{2}$, et elle est facile à évaluer quand on connaît les distances des points X et Y au point où l'on se trouve. — En effet, les deux triangles rectangles OKY, OHX donnent

$$\sin Y = \frac{r}{OY} \qquad \sin X = \frac{r}{OX}$$

r désignant le rayon du petit cercle auquel reste touj. tg^t. l'axe optique de la lunette inférieure. — Et, comme cette distance est très petite par rapport à OY et OX, les angles X et Y sont aussi fort petits, par conséqt. sans erreur sensible on pourra poser

$$Y = \frac{r}{OX} \qquad X = \frac{r}{OX}$$

Par suite

$$x = x' + \frac{r}{2}\left(\frac{1}{OX} - \frac{1}{OY}\right)$$

Rem. I. Si OX = OY, la correction est nulle. — Si les deux objets sont à une distance infinie, comme les étoiles, la correction est nulle encore. — Enfin si l'on se transporte successivement aux 3 sommets d'un triangle, et qu'on mesure les 3 angles, la somme des 3 corrections est nulle : car elle est

$$\frac{r}{2}\left\{\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC}\right) + \left(\frac{1}{AC} - \frac{1}{BC}\right) + \left(\frac{1}{BC} - \frac{1}{AB}\right)\right\} = 0$$

Rem. II. Si l'on veut apprécier numériquement l'erreur

$$E = \frac{1}{2} r \left(\frac{1}{OX} - \frac{1}{OY}\right)$$

il faut que cette erreur soit estimée en angles. Or ici elle est exprimée en arc. Car, dans les expressions $X = \frac{r}{OX}$, $Y = \frac{r}{OY}$, X et Y représentent des arcs pris dans le cercle dont le rayon est l'unité. E est donc la ½ différence de ces deux arcs. Pour que E représente un angle, on se sert de la formule

$$\text{angle } E = \frac{\text{arc } E}{\sin 1''}$$

D'où

$$E = \frac{r}{2 \sin 1''}\left(\frac{1}{OX} - \frac{1}{OY}\right)$$

ou

$$E = \frac{r}{\sin 2''}\left(\frac{1}{OX} - \frac{1}{OY}\right)$$

Pour donner une idée de l'influence que peut avoir cette erreur E, supposons $r = 20$ lignes ($0^m,045$). $\frac{r}{\sin 2''} = 2387'',32$. Si $OX = 38980^m$, $\frac{r}{\sin 2''} \cdot \frac{1}{OX} = 0'',12$. — ainsi l'erreur relative à la visée de X est de 12 centièmes de seconde : celle relative à la visée de Y est de même ordre,

donc l'erreur E qui en est la différence est très-faible.

Indiquons maintenant comment avec le cercle répétiteur on peut mesurer la distance zénithale d'une étoile.

La lunette inférieure alors ne sert plus, mais il faut rendre le pied P de l'instrument bien vertical, ainsi que le limbe. Nous indiquerons tout-à-l'heure comment on y parvient.

Le zéro du limbe coïncidant avec celui du vernier, on fait tourner tout l'instrument autour de son pied P de manière à amener le plan du limbe dans l'azimuth de l'étoile, puis, on desserre la vis qui fixait la lunette, et on la fait mouvoir avec son limbe jusqu'à ce qu'on aperçoive l'étoile. — on fait alors tourner l'instrument autour de son pied de 180°, et l'on ramène la lunette seule vers l'étoile, en desserrant la vis qui la fixe sur la graduation; alors, le zéro de la division restant fixe, le zéro du vernier est emporté avec la lunette, et décrit un arc double de la distance zénithale cherchée.

On peut avoir un arc quadruple, en tournant l'appareil de 180° autour de son axe vertical, puis le faisant tourner autour de l'axe horizontal ff' jusqu'à ce que la lunette vise de nouveau l'étoile, et recommençant les deux premières opérations.

Et ainsi de suite.

Pour que les mesures soient faites avec exactitude, il faut que le pied de l'instrument soit vertical, ainsi que le limbe. — à cet effet, la lunette inférieure porte un niveau à bulle d'air. On la rend horizontale; puis on fait tourner tout l'instrument autour de son pied. Si le niveau ne cesse pas d'indiquer l'horizontalité de la lunette, c'est que cette dernière a décrit un plan horizontal, et que l'axe de rotation est bien vertical. — Dans le cas où cela n'a pas lieu, on a recours aux vis calantes.

Cette condition est très-importante. Car si le pied de la verticale l'instrument faisant avec la verticale un angle α, on voit facilement que la distance zénithale observée différerait de la véritable juste de l'angle α.

Il faut aussi que le plan du limbe soit vertical. — Pour s'en assurer, on place derrière le limbe, perp. à son plan, un petit niveau à bulle d'air. alors, quand le niveau est horizontal, le limbe est vertical, à cause de la perpendicularité. En supposant que ce niveau ait été parfaitement réglé par l'artiste, il pourrait bien arriver qu'il se dérangeât dans sa monture, et qu'il cessât d'être perp. au limbe. C'est pourquoi on le vérifie avant de commencer les observations. Pour cela, on attache au limbe, et sur un même diamètre, deux pièces sur lesquelles on a tracé deux points qui doivent, par construction, se trouver à égale distance du plan du limbe: les artistes ont des moyens précis de remplir cette condition. à l'un de ces points, au plus élevé, on attache un fil à plomb, et l'on fait mouvoir le pied et plan du limbe jusqu'à ce qu'il vienne battre exactement contre l'autre. alors le limbe est vertical. On fait mouvoir les vis de rappel du petit niveau de manière qu'il devienne horizontal, et il peut alors servir. Sa sensibilité le rend alors préférable, et il est plus commode.

D'ailleurs cette condition n'est pas aussi essentielle que celle de la verticalité de l'axe. On démontre dans l'astronomie de Biot que l'erreur commise sur la distance zénithale n'est que le carré de α quand α

l'erreur commise en disposant l'appareil.

Dans le calcul des distances zénithales des étoiles, il faut tenir compte du déplacement de l'astre pendant la durée de l'observation qui peut être de quelques minutes quand on multiplie l'angle, selon l'usage, car sa distance zénithale a constamment varié, et a été différente à chaque visée. — On suppose que pendant les quelques minutes que dure l'observation, la variation de la distance zénithale est proportionnelle à l'accroissement de temps, et l'on considère la distance obtenue comme étant celle de l'astre à l'instant milieu entre les observations extrêmes. Il faut donc noter avec soin à la pendule le moment de la première et celui de la dernière visée.

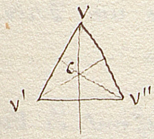
Remarques diverses sur l'emploi du Cercle Répétiteur.

Biot dit que, dans les cercles répétiteurs de 2 décim. de rayon, l'erreur des divisions ne peut pas s'élever à 15 secondes sexagésimales. — avec 30 observations, l'erreur est $\frac{1}{2}''$.

Si l'on suppose que l'exactitude des résultats moyens soit en raison composée du nombre des observations et de la longueur du rayon de l'instrument, 100 observations faites avec un cercle de 2 décim. de rayon équivaudront à une observation unique faite avec un mural de 20 m.

Rendre l'axe du Cercle Répétiteur vertical.

Les 3 vis forment un triangle équilatéral. On rend d'abord CV horizontal, et l'on fait tourner V V' V'' autour de CV de manière à rendre le plan parfaitement horizontal.



Pour cela, on prend le grand niveau parallèle au limbe. On amène le limbe dans l'azimuth CV, et l'on met le niveau horizontal. On retourne le limbe de 180°. — S'il reste horizontal, l'axe est bien vertical dans un plan perp. à CV, et CV est horizontal.

Si cela n'a pas lieu, on corrige la moitié de l'écart avec la vis V, puis on achève l'autre moitié de la correction au moyen des vis du niveau. Mais, comme on n'est jamais assuré d'avoir fait cette bissection, on recommence l'opération avec le niveau ainsi corrigé. Si le retournement donne une différence, elle est incomparablement moindre, et, en peu d'essais, on parvient à l'annuler.

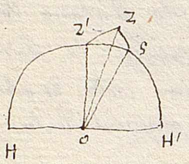
Maintenant, la colonne peut pencher dans le plan perp. à CV. Ainsi, en dirigeant le limbe dans chacun de ses azimuths successivement, trouve-t-on toujours qu'il dévie dans des sens opposés, et d'une quantité égale. — Il faut élever V' et abaisser V'' de la même quantité. — Les deux rotations se composent en une seule ayant CV pour axe.

Comme on n'opère jamais ce partage d'une manière bien exacte, il s'ensuit que le rayon CV ne conserve pas tout-à-fait son horizontalité après ces opérations. — On recommence donc, en agissant sur ce rayon, à rétablir la verticalité de l'axe. — Mais cette fois, les corrections sont incomparablement moindres, et, avec un peu d'habitude, on parvient à rendre l'axe vertical après deux ou trois essais. — alors le niveau

reste horizontal dans qq. azimuth qu'on dirige le Limbe.

Erreur que produirait un défaut de verticalité du Limbe dans la Recherche des distances Zénithales.

Soit Z' le faux Zénith, Z le vrai. S l'Etoile. — Le triangle Z'ZS est rectangle en Z' (puisque l'axe est supposé vertical).



$$\cos Z = \cos Z' \cos I$$

De là on tirerait Z, connaissant Z'. Mais il faudrait faire le calcul d'une manière minutieuse, à cause du facteur $\cos I$ qui diffère très peu de l'unité : car I est fort petit. — C'est pourquoi il est plus simple de chercher directement par approximation la différence des angles Z et Z'.

$$\cos Z = \cos Z' \left(1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} I\right)$$

$$\cos Z' - \cos Z = 2 \cos Z' \sin^2 \tfrac{1}{2} I$$

d'où

$$\sin \frac{Z+Z'}{2} \sin \frac{Z-Z'}{2} = \cos Z' \sin^2 \tfrac{1}{2} I$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(Z-Z') = \frac{\cos Z' \sin^2 \frac{1}{2} I}{\sin \frac{1}{2}(Z+Z')}.$$

d'où, approximativement, en faisant $\sin \frac{1}{2}(Z+Z') = \sin Z'$

$$\sin \tfrac{1}{2}(Z-Z') = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} I}{\operatorname{tg} Z'}$$

Si l'on compare les résultats de cette formule approchée à ceux de la formule rigoureuse, on voit que pour $I = 10'$ et $Z' = 1°$, elles sont d'accord. Plus près du Zénith, l'approximation diminue, et enfin, elle cesse d'être suffisante si $Z' = 0$, $Z' - Z = \infty$, tandis que $I = Z$.

On doit tirer de là deux conclusions.

1°. Il faut atténuer autant que possible le défaut de verticalité.

2°. Il faut éviter d'observer trop près du Zénith, où l'influence de ce défaut est sensible. — Ce dernier inconvénient est toujours nul pour la polaire, qui sert ordinairement à déterminer les latitudes.

Erreur qui peut résulter d'un défaut de parallélisme de l'axe optique.

L'angle du rayon visuel passant par l'axe optique avec la verticale sera la distance Zénithale vraie. Mais la distance Z' telle qu'on la lira sur le Limbe ne sera que la projection de Z sur le plan du Limbe au moyen d'un arc de cercle perp. à son plan. Cet arc mesure donc l'inclinaison de l'axe optique sur le plan du Limbe :

$$\cos Z = \cos Z' \cos I$$

d'où

$$\sin \tfrac{1}{2}(Z-Z') = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} I}{\operatorname{tg} Z'}$$

Cette erreur est toujours très faible : car il est facile d'éviter 1' d'erreur. Donc l'effet en sera ordinairement insensible.

Comment, lorsqu'on observe les hauteurs des astres au cercle répétiteur, peut-on éluder les effets du mouvement diurne, et opérer absolument comme si l'astre était immobile.

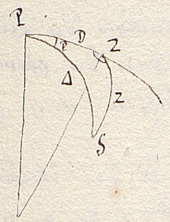
D'abord, en faisant ces observations, on ne peut ordinairement avoir que deux objets en vue : trouver l'heure par le moyen de la hauteur observée, ou trouver la hauteur méridienne de l'astre.

Supposons qu'on cherche l'heure.

Il faut alors trouver l'angle horaire par le moyen de la hauteur observée. Il est donc avantageux d'observer loin du méridien.

Le calcul fait voir que le mouvement en hauteur est le plus rapide lorsque l'azimuth est de 100°. alors, l'astre se trouve dans le vertical E. O. ou premier vertical. C'est donc surtout dans cette position qu'il est avantageux d'observer les distances au zénith. Heureusement que cette condition n'est pas essentielle ; car beaucoup d'astres ne passent pas au 1er vertical.

On a



$$\cos P = \frac{\cos Z - \cos \Delta \cos D}{\sin \Delta \sin D}$$

Un instant après

$$\cos P' = \frac{\cos Z' - \cos \Delta \cos D}{\sin D \sin D}$$

D'où

$$\cos P' - \cos P = \frac{\cos Z' - \cos Z}{\sin \Delta \sin D}$$

Alors l'on tire

$$\sin \tfrac{1}{2}(P'+P) \sin \tfrac{1}{2}(P'-P) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(Z'+Z) \sin \tfrac{1}{2}(Z'-Z)}{\sin \Delta \sin D}$$

Si $P'-P$ est très petit

$$P'-P = \frac{(Z'-Z) \sin \tfrac{1}{2}(Z'+Z)}{\sin \tfrac{1}{2}(P'+P) \sin \Delta \sin D}$$

et approximativement

$$P'-P = \frac{(Z'-Z) \sin Z}{\sin P \sin \Delta \sin D}.$$

On voit que les circonstances les plus favorables à la détermination de l'angle horaire sont celles dans lesquelles, pour une même valeur de $Z'-Z$, $P'-P$ a la plus petite valeur. — Il faut donc chercher le minimum de $\frac{\sin Z}{\sin P}$. On posera donc $\frac{\sin Z}{\sin P} = \frac{\sin \Delta}{\sin A}$, donc $A = 90°$.

On voit en outre qu'il ne faut pas que P soit trop petit. — On prendra donc les étoiles équatoriales (?).

Supposons donc que l'on ait eu égard à ces précautions diverses. On observe les distances zénithales comme on le ferait si l'astre était fixe, mais, à chaque observation, soit paire, soit impaire, on note exactement l'heure, en fractions de secondes, où l'astre s'est placé à la croisée des fils. — Chaque couple d'observations exige au plus 2', quelquef. 1', suivant l'habileté de l'observateur. De temps en temps, à la fin d'une observation paire, on lit sur le limbe l'arc parcouru.

Lorsqu'on fait la lecture des arcs après chaque couple d'observations, leur intervalle étant supposé de 2 minutes sexagésimales, on s'aperçoit que, dans l'intervalle de 8 ou 10^m. les hauteurs observées croissent proportionnellement au temps, de sorte que la moyenne des hauteurs correspond

exactement à l'époque moyenne, au moins quand on observe assez loin du méridien, comme nous l'avons indiqué. — Cela bien prouvé, on se dispense de lire les arcs à la fin de chaque observation paire, ce qui entraîne des longueurs; et on lit seulement après 6 ou 8 observations, en un mot, après un nombre de couples qui comprennent 8 ou 10^m de temps. On nomme cet assemblage une série, et l'on fait répondre l'époque moyenne des observations à l'arc moyen parcouru sur le limbe.

Mais si l'on prolongeait une même série plus longtemps, ou si l'on observait très-près du méridien, cette méthode serait inexacte, comme le prouvent l'expérience et la formule

$$Z'-Z = (P'-P)\,\frac{\sin P \sin \Delta \sin D}{\sin Z}$$

Cette formule suppose que l'on part d'une valeur de P et de Z pour passer à d'autres extrêmement voisines P' et Z'. Elle fait connaître le changement Z'-Z de la distance zénithale lorsqu'on connaît la variation P'-P de l'angle horaire, laquelle se conclut du temps écoulé entre deux observations. Tant que Z'-Z et P'-P peuvent être supposés très-petits, ces deux différences seront sensiblement proportionnelles entre elles, et la moyenne arithmétique des distances zénithales correspondra à celle des angles horaires ou des époques des observations. Mais, par cela même, on conçoit que cette supposition est limitée, et ne peut être admise que pour un temps très-court.

Peut-on juger, dans chaque cas, de son exactitude, et de l'étendue qu'on peut lui donner sans craindre d'erreurs sensibles? Il n'y a qu'à partir d'une valeur donnée de Z et de P, par ex. de la distance moyenne observée dans une série, et de l'angle horaire moyen, que l'on peut en conclure au moyen du triangle sphérique par la formule rigoureuse

$$\cos P = \frac{\cos Z - \cos \Delta \cos D}{\sin \Delta \sin D}$$

puis on supposera dans l'angle horaire un changement égal à la moitié de l'intervalle d'une série, par ex. de 5^m de temps si les séries sont de 10^m, ce qui, réduit en arc, fait un changement de $1^\circ\, 15'$ sur P. Alors, avec la nouvelle valeur $P' = P + 1^\circ\, 15'$ on calculera la nouvelle distance Z' par la formule rigoureuse

$$\cos P' = \frac{\cos Z' - \cos \Delta \cos D}{\sin \Delta \sin D}$$

et l'on aura ainsi Z' et par suite Z'-Z. — On pourra donc comparer cette valeur à celle qui résulte de la formule approchée

$$Z'-Z = (P'-P)\,\frac{\sin P \sin \Delta \sin D}{\sin Z}$$

Si elles s'accordent à très-peu près ($\frac{1}{100}$ de seconde) on pourra regarder la distance moyenne sur le limbe comme correspondant à l'époque moyenne des observations, sans quoi, il faudra resserrer les limites. — Dans ce calcul, il faut partir de l'époque moyenne parce qu'elle est la moins éloignée des extrêmes. Elle prolonge plus la proportionnalité des angles horaires et des hauteurs.

Ayant ainsi la distance moyenne de l'astre au zénith, et l'époque moyenne qui y correspond au temps de la pendule, on résoudra avec cette distance le triangle sphérique qui donne l'angle horaire. Cet angle réduit en temps sidéral donnera le nombre d'heures, minutes et secondes sidérales comprises entre l'époque des observations et le passage de l'astre au

méridien. — Si, dans ce calcul, on a soin de compter les angles horaires à partir du méridien supérieur, et dans le sens du mouvement diurne, depuis 0 jusqu'à la circonférence entière, il suffira d'ajouter l'angle horaire calculé à l'Æ de l'astre réduit en temps, et la somme sera l'angle horaire du point ♈ du Bélier, ou l'heure sidérale.

Il est entendu qu'avant d'employer la distance zénithale observée pour calculer l'angle horaire, il faut la corriger de la réfraction.

Quant à la distance polaire de l'astre, qui est aussi l'un des éléments du calcul, on la trouve dans la Connaissance des Temps. Mais, comme ce catalogue ne donne que la position moyenne de l'astre, on y fait de petites corrections relatives à la précession, à l'aberration et à la nutation, pour avoir la position apparente.

Si l'astre observé est le Soleil, l'angle horaire ainsi compté donnera l'heure solaire.

Les astronomes comptent les heures à partir de Minuit, de 0 à 24h.

Comme le disque du ☉ a un diam. sensible, on ne peut pas dans les observations consécutives saisir son centre comme pour une étoile et le placer sous le fil. — On élude la difficulté en mettant une fois le fil sur le bord supérieur, et une fois sur le bord inférieur. Par ce moyen, une distance est trop petite, l'autre trop grande du ½ diam. Et, comme les observations au cercle répétiteur se font toujours en nombre pair, il s'ensuit qu'il s'opère toujours dans chaque série une exacte compensation.

Le même artifice s'appliquerait si l'on observait une planète, ou même la Lune.

On n'observe pas les étoiles en les mettant au point de croisée, mais à une très-petite distance sur le fil horizontal. — Mais comme, malgré tout le soin de l'artiste, il est impossible que ce fil n'ait pas une petite inclinaison, on tâche d'éluder cet effet en observant toujours au même point du fil, ou au moins sur des points très peu éloignés. Pour cela, si, dans la 1re observation, la lunette étant supposée à droite de l'observateur, on a mis l'étoile un peu à droite du centre des fils, ce qui la met réellement un peu trop près du limbe, puisque nos lunettes renversent, on la place ensuite un peu à gauche de ce centre dans la 2e observation où la lunette est à gauche, ce qui la met réellemt. trop près du limbe, comme la 1re fois. Il se trouve alors qu'on a toujours rapporté l'astre au même point physique du fil, ou du moins, à une si petite distance, que l'effet de l'inclinaison du fil pendant ce faible intervalle n'a presque aucune influence sur la hauteur observée. — À la vérité, on s'écarte de qq. secondes à droite ou à gauche de l'axe optique: mais l'erreur est insensible, comme on le peut prouver par les formules données précédemment.

C'est là la Méthode des hauteurs absolues. Elle est plus exacte que celle des hauteurs correspondantes.

On peut encore augmenter les avantages en observant plusieurs séries d'un même astre, et les prenant de part et d'autre du méridien, ce qui évite toutes les erreurs d'Æ, et affaiblit même celles de réfraction.

Avec tous ces soins, Mr. Biot affirme que le cercle répétiteur offre le moyen le plus sûr de déterminer le temps, soit absolu, soit relatif, et il ne doute pas qu'il ne l'emporte à cet égard même sur

la Lunette Méridienne.

Exemple d'un calcul de Temps sidéral d'après une hauteur absolue d'étoile observée hors du méridien.

Soit Δ la distance polaire apparente, c. à d. la distance réelle affectée de la précession, aberration et nutation.

D la distance polaire du Zénith.

Z la dist. zénithale observée, corrigée de la réfraction.

P l'angle horaire demandé.

on a
$$\sin\tfrac{1}{2}P = \sqrt{\frac{\sin\frac{Z+\Delta-D}{2}\,\sin\frac{Z+D-\Delta}{2}}{\sin\Delta\,\sin D}}$$

Voici un ex. de ce calcul appliqué à une observation de Rigel faite à Dunkerque le 21 Mars 1809, à la latitude de 51° 2' 5", la hauteur du Barom. étant 0m,76865, et la températ. 6° cent.

La distance de Rigel au Pôle Boréal prise dans la Connaissance des Temps et réduite en position apparente pour le 21 Mars 1809 est
$$\Delta = 98°\ 26'\ 8'',35$$
l'AR réduite en temps pour le même jour
$$AR = 5^h\ 5^m\ 22^s,61$$
L'observation faite au Cercle Répétiteur après le passage de Rigel au méridien a donné pour la distance apparente au Zénith:

	70° 45' 59",21
Correction de niveau	−0",47
	70° 45' 58",74
Réfraction calculée par les Tables	2' 5",01
Distance vraie de R. au Zénith à l'instant moyen de l'observation	70° 48' 28",75

avec ces données, on achèvera le calcul ainsi qu'il suit

	P = 44° 37' 37",6 = 2h 58m 30s,51
D'ailleurs	AR = 5h 5m 22s,61
	8h 3m 53s,12
Époque moyenne de la Série, en temps de la pendule	5h 46m 30s,28
Retard de la pendule sur le temps sidéral	2h 17m 22s,84

Le calcul précédent suppose que l'on a tu calculer la dist. polaire et l'AR apparente de Rigel pour le jour de l'observation. — à cet effet, il faut connaître la précession, l'aberration et la nutation de l'étoile pour ce même jour afin d'ajouter ces quantités à sa position moyenne.

---

on a vu que les distances zénithales successives d'un astre et les angles horaires qui y correspondent sont liés entre eux par la relation suivante:
$$\sin\tfrac{1}{2}(Z'+Z)\sin\tfrac{1}{2}(Z'-Z) = \sin\Delta\,\sin D\,\sin\tfrac{1}{2}(P'+P)\sin\tfrac{1}{2}(P'-P)$$
Supposons que Z représente la distance méridienne, et Z' une distance observée

très-près du méridien, en sorte que $Z'-Z$ soit une très-petite quantité que nous nommerons δ (+ pass. sup. − pass. inf.)

Supposons encore que Z ~~représente la distance méridienne~~ si l'on compte les angles horaires à partir du méridien où l'on observe le passage. L'angle horaire P répondant à Z sera nul, et P' correspondant à Z' sera très-petit.

En faisant ces substitutions dans la relation précédente, elle devient

$$\sin(Z+\tfrac{1}{2}\delta)\sin\tfrac{1}{2}\delta = \sin\Delta \sin D \sin^2\tfrac{1}{2}P'$$

ou

$$\sin Z \sin\delta + 2\cos Z \sin^2\tfrac{1}{2}\delta = 2\sin\Delta\sin D\sin^2\tfrac{1}{2}P'$$

(à cause de $\sin\delta = 2\sin\tfrac{1}{2}\delta\cos\tfrac{1}{2}\delta$)

La valeur exacte de $\sin\delta$ peut s'exprimer en une série convergente ordonnée suivant les puissances de $\sin^2\tfrac{1}{2}P'$. — Mais on peut sans aucun calcul obtenir le 1er terme du développement, qui suffit presque toujours. Car, en remarquant que $\sin\delta$ et $\sin\tfrac{1}{2}\delta$ sont très-petits, on pourra négliger $\sin^2\tfrac{1}{2}\delta$, et l'on aura dans une première approximation

$$\sin\delta = \frac{2\sin\Delta\sin D\sin^2\tfrac{1}{2}P'}{\sin Z}$$

On peut encore rendre le calcul plus commode en remarquant que δ est un très-petit arc. On posera

$$\sin 1'' : \sin\delta :: 1'' : \delta$$

$$\sin\delta = \frac{\delta \sin 1''}{1''}$$

Donc

$$\delta = \frac{\sin\Delta\sin D}{\sin Z}\cdot\frac{2''\sin^2\tfrac{1}{2}P'}{\sin 1''}$$

et la correction est exprimée en secondes.

Comme on a en général $Z'-Z=\delta$, on aura la dist. méridienne $Z = Z'-\delta$.

Pour établir la continuité entre les expressions algébriques, il faut compter la distance polaire Δ en allant du méridien sup. au méridien inf. depuis 0 jusqu'à la circonférence entière. Alors, pour tous les passages supérieurs, Δ sera $< 180°$, $\sin\Delta$ sera > 0, et δ restera positif, et par conséquent se retranchera des distances zénithales observées. — Au contraire, pour les passages au méridien inférieur, $\sin\Delta < 0$ et δ s'ajoutera.

Pour appliquer la formule précédente, on calculera les valeurs du facteur $\frac{2''\sin^2\frac{1}{2}P'}{\sin 1''}$ correspondantes aux époques des observations, on en fait la somme, et l'on divise par le nombre des observations. Puis on multiplie ce résultat par le facteur $\frac{\sin\Delta\sin D}{\sin Z}$ qui est constant pour toutes les séries d'un même astre, et l'on aura la correction moyenne de la distance zénithale observée.

L'autre genre d'observations que l'on peut faire avec le cercle répétiteur, c'est la mesure de la hauteur méridienne des astres.

Pour cela, on observe une série de distances zénithales avant le passage au méridien, et une série après, à une distance à-peu-près égale. La distance moyenne donnée par ces séries diffère peu de la distance

méridienne. — Cependant, elle-ci n'est pas tout-à-fait égale, puisque celle-ci, dans les passages supérieurs, est la plus petite, et dans les inférieurs, la plus grande de toutes celles qu'on observe. — Mais, en marquant avec exactitude l'époque où chaque observation a été faite, et connaissant d'ailleurs l'époque précise du passage de l'astre au méridien et sa distance polaire, on sait calculer la correction que chaque distance nécessite. — Cette correction n'est plus simplement proportionnelle aux variations de l'angle horaire comme dans le cas des observations faites loin du méridien: elle est prop. au carré du sinus de la moitié de l'angle horaire (voir la note précédente). — Dans les passages supérieurs, elle est soustractive des distances au zénith, parce qu'alors la distance méridienne est la plus petite de toutes; dans les passages inférieurs, elle est additive. — Connaissant l'arc parcouru sur le limbe et la somme de toutes les distances observées, on y applique la somme de toutes les corrections, dans le sens convenable, et l'on divise la somme des arcs et des corrections par leur nombre: ou, ce qui revient au même, on prend la moyenne des distances observées, et on lui ajoute la moyenne de toutes les corrections.

Le complément de la distance ainsi obtenue est la hauteur méridienne.

Il y a un cercle vicieux apparent. Car, pour calculer la correction, il faut connaître la distance polaire de l'étoile, sa distance méridienne, et la distance polaire du zénith: et c'est ordinairement pour trouver une de ces trois choses qu'on fait les observations dont nous parlons. Mais on remarquera que la connaissance exacte de ces éléments n'est pas du tout nécessaire: il suffit de leur valeur approchée. Car les erreurs qu'on y peut commettre sont considérablement atténuées, parce que, dans l'expression de la réduction au méridien, elles se trouvent multipliées par le carré du sinus de la moitié de l'angle horaire, de sorte que l'influence de ces erreurs sur la valeur de la réduction δ est tout-à-fait insensible. C'est pourquoi, si l'astre est connu, il suffira de prendre sa distance polaire dans la Connaissance des Temps ou dans les cartes célestes. — Et si de plus on connaît à peu près la latitude D, on en conclura une valeur de Z assez approchée pour calculer la 1ère réduction δ. — Mais si D n'est pas connu même approximativement, on n'a qu'à employer d'abord pour Z la distance moyenne observée, sans autre correction que celle de la réfraction. Avec cette valeur et celle de Δ, qui est supposée connue, on calculera D, ou la distance du pôle au zénith. Au moyen de ces valeurs approchées, on obtiendra celles de δ, et recommençant le calcul avec la distance méridienne corrigée on en tirera une valeur de D plus exacte. Alors ces éléments seront connus avec assez de précision pour qu'on puisse les employer au calcul définitif de la correction δ.

À la vérité, nous empruntons encore ici des tables la distance polaire de l'astre. Dans l'état actuel de l'astronomie, ces distances sont connues pour les principales étoiles avec une extrême précision. Mais si l'astre observé était inconnu, il faudrait au moins supposer que l'on connaît la latitude du lieu où l'on observe, et par conséquent la distance du pôle au zénith. Alors avec cette distance et la valeur approchée de Z, on calcule approximativement Δ, ce qui suffit pour avoir δ, et par suite Z et Δ avec plus d'exactitude, au moyen d'un 2d calcul, comme dans le cas précédent.

Enfin, si l'on voulait que l'observateur tirât tout de lui-même, il faudrait qu'il déterminât approximativement la latitude par les passages sup. et inf. des étoiles circompolaires, ce qui n'exige pas la connaissance de la dist. polaire; après quoi, il s'occuperait des autres astres.

Nous avons supposé que les angles horaires correspondants à chaque observation sont donnés en temps par l'horloge. — Pour cela, il faudrait que l'horloge suivît exactement le temps sidéral, si c'est une étoile qu'on observe; le temps solaire, si c'est le soleil; et en général que sa marche fut conforme à celle de l'astre observé. Il est impossible que cette condition soit remplie à la rigueur, mais elle n'est pas indispensable: il suffit que le mouvement de l'horloge soit bien connu, et on le réduit à ce qu'il devrait être par le moyen du calcul. — Si ce mouvement s'écarte peu de celui de l'astre, il n'en résulte qu'une petite correction très facile à faire sur le résultat définitif.

Mais ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que, si l'astre observé avait un mouvement propre en déclinaison, il serait nécessaire d'y avoir égard: car la distance méridienne qui se déduit de chaque observation partielle au moyen des réductions précédentes est celle qui aurait lieu réellement si la déclinaison de l'astre restait toujours la même qu'à l'époque de la 1re. observation. Si cette déclinaison varie, la distance réduite doit différer de la distance méridienne véritable, et cette différence doit être égale au changement de la déclinaison depuis l'époque de l'observation jusqu'à celle du passage au méridien. C'est pourquoi, si l'on suppose le mouvement en déclinaison uniforme pendant la durée de la série, il faudra calculer proportionnellement la correction de chaque distance réduite, en raison de l'angle horaire qui y correspond. Ces corrections devront évidemment être de signes contraires avant et après le passage au méridien, en supposant, comme c'est le cas ordinaire, que le changement en déclinaison se continue dans le même sens pendant tout le temps de la série. Car alors, si ce changement augmente la distance zénithale d'un côté du méridien, il la diminue de l'autre côté. De là résulte cette règle fort simple: faites séparément la somme des angles horaires observés avant et après le passage, ces angles étant exprimés en temps, par ex. en minutes: retranchez ces deux sommes l'une de l'autre, divisez leur différence par le nombre des observations, et multipliez le résultat par le mouvement de l'astre en déclinaison pour 1m. de temps, mouvement qui est donné par les tables astronomiques. Le produit sera la correction qu'il faut appliquer à la distance méridienne, calculée d'après l'ensemble de la série, comme si la distance polaire était constante.

Une seule série de ce genre faite sur un astre dont on connaît la distance polaire méridienne suffit pour déterminer la latitude du lieu où l'on observe. Car si l'astre passe au méridien du côté de l'équateur, en retranchant sa distance méridienne de sa distance polaire, on aura la distance du pôle au zénith. — Si au contraire l'astre passe au méridien du côté du pôle, on ajoutera dans le passage supérieur la distance polaire à la distance méridienne, dans les passages inférieurs, on la retranchera.

Parmi les étoiles que l'on peut choisir pour obtenir ainsi la latitude, la polaire est la meilleure, parce que c'est celle pour laquelle les réductions au méridien sont les plus petites. Cela tient à la petitesse de sa distance polaire. C'est elle aussi qui a été la plus observée, surtout dans

les derniers temps : par conséquent sa distance polaire est parfaitement connue. — On peut encore observer avec sûreté β de la petite ourse, qui a été aussi beaucoup observée par Méchain et Delambre.

Lorsqu'on veut déterminer une latitude avec une précision extrême, par exemple pour la mesure d'un méridien, ou le tracé d'une grande carte, on tâche de se rendre indépendant même de la distance polaire. Pour cela, on observe au cercle répétiteur les deux passages sup. et inf. d'une étoile circumpolaire, par ex. la Polaire ou β de la petite ourse. On réduit ces observations au méridien avec les valeurs de la distance polaire les plus exactes qu'on peut se procurer, et l'on tire de chacune d'elles une distance du pôle au zénith affectée de toute l'erreur qui peut avoir été commise sur la distance polaire. Mais cette erreur agit en sens contraire sur les résultats des deux passages. Elle disparaît donc dans leur somme, qui donne ainsi la distance du pôle au zénith, et se double dans la différence, qui donne l'erreur de la distance polaire. — Cette compensation est tout-à-fait pareille à celle qui se fait dans la distance méridienne du ☉ lorsqu'on observe les deux bords.

Le cercle répétiteur peut encore servir et sert en effet à trouver la distance angulaire de deux astres, ou celle d'un astre à un objet fixe. Le procédé est absolument le même que pour mesurer les angles de position des objets terrestres dans des plans inclinés. Seulement, si l'un des objets ou tous les deux sont mobiles, il faudra faire varier continuellement l'inclinaison du plan du limbe de manière à lui faire suivre toujours les deux objets. Chaque fois que la lunette est pointée sur l'astre, on note exactement l'heure, la minute, la seconde, .. comme dans les autres observations célestes. En bornant les séries à un petit nombre de minutes, on peut regarder la distance moyenne comme répondant à l'époque moyenne des observations. Car nous avons vu qu'à de grandes distances du méridien, le mouvement de l'astre est sensiblement uniforme pendant un petit intervalle de temps.

Cette opération, qui exige beaucoup d'habileté et d'exactitude, sert à trouver les azimuths des objets terrestres, par ex. ceux des signaux, pour orienter une méridienne ou une carte. La distance du signal au zénith étant constante, peut être facilement observée. Celle de l'astre peut se calculer d'après le temps de l'observation. Avec ces données et la distance angulaire, on forme un triangle sphérique dont les 3 côtés sont connus. On peut donc trouver facilement l'angle opposé au 3e : c'est la différence des azimuths. On connaît d'ailleurs l'azimuth de l'astre, d'après le temps de l'observation et d'après l'heure de son passage au méridien. On connaîtra donc l'azimuth absolu de l'objet.

Il faut remarquer que, dans ce calcul, on doit employer la distance apparente au zénith, affectée de la réfraction, puisque l'arc observé est pris entre ces distances apparentes. Il est clair que l'azimuth absolu et les différences d'azimuths restent les mêmes malgré le changement des hauteurs.

On fait commodément ces observations sur le Soleil.

Généralement, l'instant le plus favorable est celui où l'angle horaire de l'astre est de 90°, ou 6 h. après son passage au méridien. Car alors

l'astre cesse de s'éloigner du méridien, ce qui fait que, dans les observations voisines de cette époque, l'azimuth varie fort peu. — D'un autre côté, il faut se garder d'opérer trop près de l'horizon, lorsque l'astre entre dans des couches où l'on peut craindre des réfractions extraordinaires. Car alors sa distance au zénith qu'il faudrait calculer d'après l'observation du temps pourrait être fort inexacte.

On évite cet inconvénient en employant la polaire au lieu du soleil. alors il faut avoir un signal de feu qui puisse être aperçu la nuit, afin de pouvoir observer sa distance angulaire à l'Etoile. — Pour cet objet, rien n'est plus avantageux que les lampes à courant d'air munies de réflecteurs. — on prend ensuite à loisir l'angle que ce signal forme avec l'objet terrestre dont on veut déterminer l'azimuth.

Théodolite.

Cet instrument sert à mesurer l'angle de deux plans verticaux passant par l'observateur et deux objets, — et aussi à mesurer les distances zénithales. Il remplit donc le même but que le cercle entier. Seulement, il a des dimensions moindres, et a le grand avantage de répéter chacune des deux mesures dont nous venons de parler, de manière à donner un multiple de ces angles. Nous connaissons le grand avantage de cette méthode.

Cet instrument doit donc, comme le cercle entier, se composer d'un axe vertical portant un cercle vertical muni d'une lunette et un autre cercle horizontal. — Le cercle horizontal est muni de verniers, et peut glisser dans une couronne qui porte les divisions. — Le cercle vertical est mobile avec la lunette dans une couronne analogue.

L'instrument possède 4 mouvements :

1°. Mouvement tout d'une pièce autour d'un axe vertical, sans qu'aucun vernier se déplace sur les limbes.

2°. Mouvement de l'appareil autour de l'axe vertical, pendant que le zéro du vernier du cercle horizontal parcourt l'anneau correspondant qui reste fixe.

3°. Mouvement du cercle vertical avec l'anneau qui l'entoure, autour d'un axe horizontal, sans que le zéro du vernier du cercle se déplace sur l'anneau qui l'entoure.

4°. Mouvement du cercle vertical dans son anneau sans que celui-ci change de place.

D'abord, il faut s'attacher à assujettir bien solidement l'appareil. Pour cela, on a 3 rondelles de cuivre munies à leur partie inférieure de 3 pointes; on les place sur le support, et c'est sur ces pointes qu'on fait reposer les vis calantes qui portent le théodolite. Le poids de l'instrument fait enfoncer les pointes dans le bois, et il n'y a aucun danger qu'il se dérange dans le courant des opérations.

Il faut ensuite s'assurer que l'axe est vertical. — Pour cela, on se sert d'un niveau à bulle d'air placé parallèlement au plan du limbe horizontal, et on le place d'abord de manière que la bulle soit au milieu. Puis, on fait tourner l'instrument, et si la bulle reste toujours au milieu du niveau, c'est que l'axe est vertical. — Sinon, on se sert des vis calantes.

Pour voir si le plan du cercle avec lequel se meut la lunette est bien vertical, on se sert d'un second niveau qu'on place longitudinalement sur l'axe de ce limbe, et, au moyen d'une vis de pression, on donne à l'extrémité de l'axe de petits mouvements ascendants ou descendants, jusqu'à ce que le niveau indique qu'il est horizontal. Et comme on a construit cet axe parfaitement perp. au plan du limbe, on en conclut que celui-ci est bien vertical.

Ces précautions une fois prises, expliquons comment on mesure l'angle des plans verticaux passant par deux objets et l'observateur. — Il faut d'abord amener le zéro du vernier du cercle horizontal sur le zéro

de la division de l'anneau qui l'entoure. Je fixe alors le cercle sur son anneau, après quoi je fais tourner tout l'instrument autour de son axe vertical de manière à diriger le plan du cercle vertical à peu près dans un des plans verticaux donnés. Je me sers de la vis de rappel pour que la coïncidence finisse par être complète. (Dans ce mouvemt. le zéro du vernier du cercle horiz. n'a pas bougé.) Je m'assure que cette coïncidence est complète au moyen de la lunette que je fais tourner dans son plan d'une manière quelconque, puisque je n'ai pour but que de mesurer l'angle des deux plans verticaux. alors, etc.

Ce qui donne l'angle cherché.

Il est facile d'en avoir un multiple, le double, le triple, le quadruple, le quintuple, etc. – c'est évident.

Lunette d'épreuve. – au pied de l'instrument se trouve une lunette qui qui sert à vérifier si, dans le cours de chaque opération, l'instrument n'a éprouvé aucun dérangement. Pour cela, on la dirige d'abord vers un objet déterminé, et, à la fin de chaque opération, on vérifie si la lunette est encore dans la direction de l'objet. – Si elle ne s'y trouve pas, on l'y ramène par un mouvement de rotation angulaire très lent auquel participe tout le système : et alors on pointe de nouveau le 2e objet.

Nous allons indiquer comment on peut, avec le théodolite, mesurer les distances zénithales des étoiles en astronomie, et d'un objet geg. d'une montagne par ex. en géodésie.

1°. Sur le limbe vertical, on place le zéro du vernier en coïncidence avec le zéro de la division, ce qui se fait par un mouvement à la main, puis par un mouvemt. insensible au moyen d'une vis tangente.

2°. alors on fait tourner le limbe autour de l'axe vertical de manière à l'amener dans le plan de l'objet dont on veut mesurer la distance zénithale, et l'on fait tourner ce même limbe sur lui-même, c.à.d. autour de son axe horizontal, de manière à viser l'objet avec la lunette.

3°. on tourne le limbe de 180° autour de l'axe vertical. on desserre la vis qui fixe la lunette à l'anneau et l'on fait tourner la lunette dans le plan du limbe de manière à viser l'étoile. – on a ainsi l'angle double de la distance zénithale cherchée.

angle quadruple :

1°. Rotation de 180° autour de l'axe vertical.

2°. Rotation de la lunette et du cercle intérieur autour de l'axe horizontal jusqu'à ce qu'on ait ramené la lunette sur l'étoile.

3°. on continue comme pour mesurer un angle double. – on a alors l'angle quadruple.

Pièces accessoires.

1°. Réflecteur en ivoire pour éclairer les fils de la lunette dans les observations de nuit.

2°. oculaire particulier pour les étoiles voisines du zénith : un miroir incliné à 45°. Réfléchit horizontalement les rayons verticaux, et évite à l'observateur une position pénible.

Sextant.

Son invention est due incontestablement à Newton.

Sa description est partout (Briot, cosmographie).

Premier principe.

Si les deux miroirs sont tous deux perp. au plan passant par l'oeil et les deux objets, et sont parallèles, un objet sera vu par double réflexion dans la même direction que directemt. — et réciproquement.

Second principe. — &c

Voir les notes à la fin, page 327.

---

avant de se servir de l'instrument, il faut s'assurer de la perpendicularité des deux miroirs sur le plan du limbe. — Pour le miroir mobile, qui est entièrement étamé, on regarde le bord du limbe gradué, par réflexion. Il faut que l'image soit dans le prolongemt. du bord réel. — Pour le miroir fixe, on s'assure qu'elle l'on peut obtenir la coïncidence des deux images d'un même objet.

Cela posé, on détermine d'abord le point de la division où aboutit le zéro du vernier quand les deux miroirs sont parallèles : c'est l'erreur de collimation.

Nous supposerons que cette erreur n'existe pas.

Usage du Sextant :

D'où vient son nom. — Il donne les angles de 120°.

Les marins l'emploient pour mesurer la hauteur d'un astre au-dessus de l'horizon. Ils prennent le bord de la mer pour horizon, et l'étoile pour second objet. — Si c'est le soleil qu'on observe, on se sert de glaces noircies.

Le bord de la mer n'indique pas l'horizon vrai. — Il y a des corrections dont nous parlerons plus tard.

On peut encore avec cet instrument mesurer la distance angulaire de deux astres.

Cercle à Réflexion.

Cet instrument ne diffère du Sextant qu'en ce que, au lieu d'un limbe comprenant 60°, on a un cercle gradué tout entier, ce qui permet d'appliquer le principe de la Répétition des angles. — Il est dû à Borda. —

On y retrouve les deux glaces de tout à l'heure : seulement, elles sont toutes les deux mobiles. La glace demi-étamée et demi-transparente est fixée à la Lunette, mais leur ensemble peut tourner sur le cercle divisé. — Le miroir étamé se meut avec une alidade munie d'un vernier.

On commence par s'assurer, comme dans le Sextant, que les deux miroirs sont perp. au plan du Limbe. Puis on met la Lunette au zéro du Limbe, et l'on rend l'autre miroir parallèle à celui qui est fixé à la Lunette.

Pour mesurer l'angle de deux objets, on en regardera un directement ; puis on détachera l'alidade du grand miroir, et on la fera tourner jusqu'à ce que l'image du 2^d. objet coïncide avec celle du 1er. — L'angle dont elle a tourné est la moitié de celui qu'il faut mesurer. — Mais, comme le cercle est divisé en demi-degrés, on lit l'angle lui-même.

Pour avoir des multiples de cet angle, on desserre la vis qui rendait fixe le miroir double et la lunette, et on le rend parallèle au grand miroir. On le fixe, et l'on fait tourner le grand miroir de manière à reproduire la coïncidence. — On a ainsi sur le Limbe l'angle double.

On peut continuer autant qu'on le veut.

De la Terre.

Jusqu'à présent, nous n'avons fait que vérifier les lois du mouvement des astres autour de l'axe du monde en supposant que l'observateur reste toujours dans un même lieu.

Si nous supposons maintenant qu'il se déplace à la surface de la Terre, les lois précédentes sont toujours vérifiées par l'expérience, et les astres lui sembleront toujours décrire des cercles autour d'un certain axe.

De ce fait, on peut conclure que les dimensions de la Terre ne sont pas appréciables par rapport aux grandes distances qui nous séparent des étoiles. — En effet, quand un objet nous semble décrire une circonférence, c'est que les rayons visuels menés à cet objet décrivent un cône. Cet objet ne pourra donc nous paraître décrire un cercle qu'autant que nous nous déplacerons sur l'axe de ce cône. Donc, s'il paraît toujours décrire un cercle quelle que soit la position de l'observateur à la surface de la Terre, il faut que celle-ci ne soit qu'un point mathématique par rapport aux distances des étoiles.

La petitesse des dimensions de la Terre par rapport aux étoiles résulte aussi de ce que les distances angulaires des étoiles restent les mêmes quel que soit le point où l'on observe.

Enfin, une dernière preuve, c'est que les étoiles, dans les télescopes les plus puissants, n'offrent pas de diamètre appréciable : le fil le plus fin suffit pour les cacher. Elles nous paraissent donc excessivement petites. Mais ce doivent être des corps très-considérables, sans quoi la lumière qu'elles nous envoient ne serait pas aussi vive. Il faut donc conclure de là que leurs distances à la Terre sont infiniment grandes.

Les étoiles vont nous fournir aussi une preuve de la rondeur de la Terre. En effet, si leur disposition mutuelle reste la même quand on se déplace sur la surface de la Terre, il n'en est pas de même de leurs distances à l'horizon. Si l'on marche vers le N. on voit le pôle s'élever de plus en plus vers notre zénith. Si l'on marche vers le S. il s'abaisse. Or la hauteur du pôle, c'est l'angle que fait l'axe du monde avec le plan de l'horizon. Comme cet angle croît ou décroît d'une manière continue quand on s'avance dans un sens ou dans l'autre d'une manière continue, il faut que le plan de notre horizon s'incline toujours dans le même sens quand nous nous dirigeons toujours vers le N., et toujours en sens contraire quand nous rétrogradons vers le S.

Si maintenant nous nous éloignons d'un méridien connu, et que, muni d'un bon chronomètre marquant l'heure de l'observatoire que nous quittons, nous nous avancions toujours vers l'E.O., nous verrons les astres passer aux nouveaux méridiens plus tard qu'au méridien primitif. Il faut en conclure que le méridien s'est incliné vers l'O. et que le plan tangent

s'est incliné dans le même sens.

Ainsi, soit qu'on marche vers le N. le S. l'E. ou l'O. pourvu qu'on ne rétrograde pas, le plan tgt. à la surface de la terre s'incline toujours dans le même sens. — Ce caractère ne peut appartenir évidemment qu'à une surface convexe : c'est évident.

Cette convexité résulte aussi des observations que l'on peut faire au bord de la mer sur un vaisseau qui s'éloigne, et sur la manière dont disparaît aux yeux d'un navigateur un phare ou une éminence situés au bord de la mer.

Nous devons donc nous figurer le globe terrestre isolé dans l'espace, et cette idée est toute naturelle quand on songe aux voyages de circumnavigation exécutés dans tous les sens ; en marchant sans cesse vers l'orient ou vers l'occident, les voyageurs sont revenus au point de départ.

Mais jusqu'ici, rien ne nous indique d'une manière bien précise la forme de la terre. — Nous allons citer quelques faits qui prouvent qu'elle est sensiblement sphérique.

D'abord, quand on est en pleine mer, l'horizon est sensiblement un cercle : et si, avec un instrument propre à mesurer les distances zénithales, nous cherchons les hauteurs des différents points de ce cercle, nous les trouvons égales entre elles. — C'est donc un cercle dont l'axe est vertical, et le cône qui a pour sommet l'œil de l'observateur et pour base ce cercle est un cône droit tangent à la surface de la terre. — L'observation précédente se fait à toutes les hauteurs accessibles à l'homme.

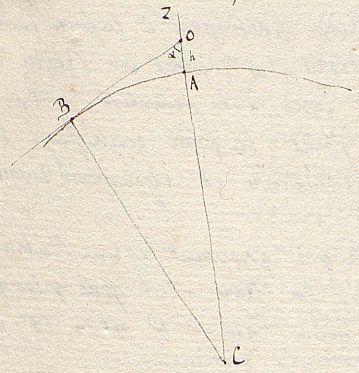
Avec ces données expérimentales, le problème est réduit à une question de géométrie :

Quelle est l'enveloppe d'une série de cônes de révolution ayant même axe ?

C'est une surface de révolution autour de ce même axe.

Mais, comme la même chose a lieu pour une infinité de points de la surface terrestre, on en conclut que cette surface est de révolution autour d'une infinité d'axes, et que c'est une sphère par conséquent.

Ce genre d'observation nous fournit une valeur approchée du rayon de la sphère terrestre. En effet, supposons qu'on soit en O à une certaine hauteur h au-dessus du niveau de la mer, et qu'on mesure la distance zénithale de l'horizon, c.à.d. l'angle BOZ. — Soit α son supplément. — Le triangle rectangle BOC donne



$$R = (R+h)\sin\alpha$$

$$R(1-\sin\alpha) = h\sin\alpha$$

$$R = \frac{h\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$$

α diffère très peu de $90°$. Si $\alpha = 90° - \varepsilon$, on aura

$$R = \frac{h\cos\varepsilon}{1-\cos\varepsilon}$$

et si nous remplaçons $\cos\varepsilon$ par 1, $1-\cos\varepsilon$ par $2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$, et puis par $\frac{\varepsilon^2}{2}$, il viendra

$$R = \frac{2h}{\varepsilon^2}$$

Pour $h = 100^m$ on trouve $\varepsilon = 1° = \frac{\pi}{180}$: et par suite $R = 6340000^m$.

Pour que les résultats soient suffisamment approchés, il faut corri-

-ger les distances zénithales des effets de la réfraction, et faire l'observation quand l'atmosphère est très-sereine.

Admettons ce résultat d'approximation que la Terre soit sphérique.

Axe Terrestre.

Pôles.

Méridiens.

Equateur.

Parallèles.

Latitude et Longitude.

Théorème :

La latitude d'un lieu est la hauteur du Pôle.

Nous avons supposé dans ces définitions la Terre parfaitement sphérique. elles cesseraient d'avoir lieu si la Terre ne l'était pas. — Or il arrive que la vraie fig. de la Terre diffère un peu d'une sphère. Nous serons donc obligés de modifier quelques unes de ces définitions. — Mais elles suffisent provisoirement.

Atmosphère.

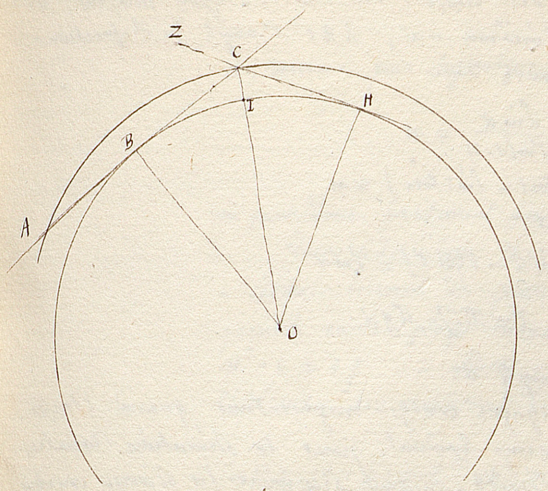
On donne le nom d'atmosphère à la couche d'air qui enveloppe la Terre, et dont la densité varie avec la hauteur. — Si elle suivait la loi de Mariotte et que la température fût uniforme, les hauteurs croissant en progression arithmétique, les densités décroîtraient en progression géométrique. Par suite l'atmosphère serait illimitée.

Or ceci n'a pas lieu. En effet, la Terre tournant avec son atmosphère autour de son axe, les molécules de cette atmosphère participent à la force centrifuge. Cette force croît avec le rayon du cercle décrit, et, pour un rayon égal à 5 ou 6 fois le rayon Terrestre, elle est égale à la pesanteur. — Par conséq. si l'atmosphère est illimitée, en un certain point la force centrifuge serait égale à la pesanteur, et au delà elle serait supérieure et disperserait toutes les molécules excédantes (ceci me paraît faux).

Il y a d'ailleurs d'autres phénomènes qui prouvent que l'atmosphère est limitée. — Après que le soleil s'est couché, la Terre n'est pas plongée dans l'obscurité, et elle reçoit de la lumière lors même que le ☉ est à 18° au dessous de l'horizon.

Voyons ce qu'on peut conclure delà.

Soit A le dernier rayon du ☉ qui vient raser en B la surface de la Terre. Les parties du Globe comprises entre B et H ne sont pas éclairées par la lumière directe du ☉ : mais elles le sont par la lumière dispersée dans une portion de l'atmosphère. — Soit C le point limite de l'atmosphère on aura de la lumière jusqu'en H : mais tous les points situés au delà de H seront dans l'obscurité.



L'inclinaison du soleil par rapport à l'horizon du point H, c'est $ZCA = BOH = 18°$. Donc $IOH = 9° = \alpha$.

De cet angle il est facile de conclure la hauteur de l'atmosphère, si toutefois elle est limitée. En effet, en posant $IC = h$, le tr. rect. COH donne

$$(h+R)\cos\alpha = R$$

$$h = \frac{R(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}$$

On trouve ainsi que $h = \frac{1}{100} R$.

Cette détermination ne peut acquérir une certaine précision que dans les pays où l'atmosphère est très sereine. On voit alors très bien dans le ciel la ligne de séparation de l'ombre et de la lumière.

Ainsi les dernières couches de l'atmosphère qui nous renvoient de la lumière ne sont pas à une distance plus grande que 15 ou 16 lieues : 6300^m.

L'observation des aurores boréales est moins exacte et donne à peu près la même valeur.

Pour expliquer cette limite de l'atmosphère, il faut remarquer que la température varie d'un point à l'autre quand on s'élève, de sorte que les densités de l'air ne varient pas en progression géométrique. On traite cette question en mécanique, et l'on voit qu'il y a d'autres lois de décroissement de la densité qui conduisent au même résultat que l'expérience.

Réfraction atmosphérique.

Dans la théorie de la réfraction, on peut admettre sans erreur sensible que la terre est sphérique, et que l'atmosphère se compose de couches concentriques de même densité, de telle sorte que la densité de l'atmosphère à une certaine distance de la terre est constante.

Théorème.

La réfraction ne change pas l'azimuth d'un rayon lumineux.

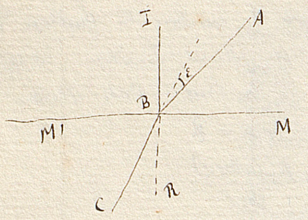
C'est évident.

Le rayon ne peut être dévié à droite ou à gauche du plan vertical que par des causes accidentelles. Aussi faut-il éviter d'observer près de l'horizon pendant de violents orages, ainsi qu'à la surface de la mer : car à cause de la différence de température entre l'air et l'eau, il peut s'établir des variations de densité d'un instant à l'autre.

Quand un astre est près du zénith, la réfraction est nulle ; mais à mesure qu'il s'en éloigne, elle va en augmentant. Car le rayon lumineux traverse alors les couches atmosphériques sous une incidence de plus en plus grande, et la déviation doit être aussi de plus en plus en plus grande.

En effet soit n l'indice de réfraction du 2^d. milieu par rapport

au premier, n étant peu différent de l'unité. Soit AB le rayon incident, BC le rayon réfracté, ABI l'angle d'incidence $=\alpha$, RBC l'angle de réfraction $=\beta=\alpha-\varepsilon$. On aura donc



$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\varepsilon)}=n$$

$$n(\sin\alpha\cos\varepsilon-\sin\varepsilon\cos\alpha)=n$$

et approximativement

$$n(\sin\alpha-\varepsilon\cos\alpha)=\sin\alpha$$

$$\varepsilon=\frac{n-1}{n}\,tg\,\alpha$$

On voit donc que ε croît avec l'angle α.

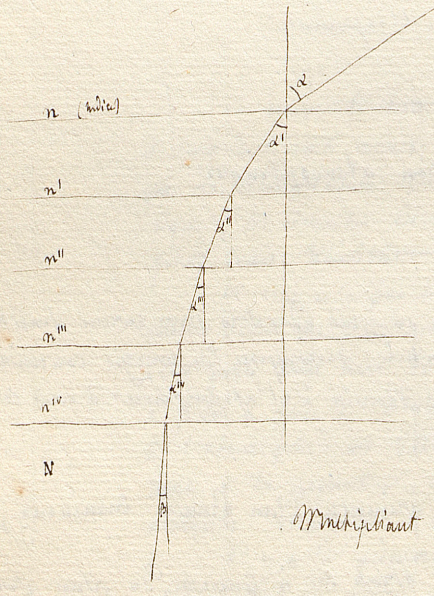
La déviation produite par chaque couche augmentant quand l'astre s'éloigne du zénith, il en est de même évidemment pour la déviation totale.

Si l'astre s'éloigne peu du zénith, on peut regarder les diverses couches d'air qu'il traverse comme sensiblement parallèles, et le calcul de la déviation est facile à faire.

En effet, il suffit de se rappeler ce principe d'optique :

Si plusieurs milieux sont terminés par des plans parallèles, l'angle de réfraction à la sortie ne dépend que de l'angle d'incidence à la surface du 1er milieu, et de l'indice de réfraction du 1er milieu par rapport au dernier.

En voici la démonstration.



Désignons par $n, n', n'', n''', n^{iv}, N$ les indices de réfraction des divers milieux par rapport au vide ($n<n'<\ldots<N$). Nous aurons

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}=\frac{n'}{n}$$

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha''}=\frac{n''}{n'}$$

$$\frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha'''}=\frac{n'''}{n''}$$

$$\frac{\sin\alpha'''}{\sin\alpha^{iv}}=\frac{n^{iv}}{n'''}$$

$$\frac{\sin\alpha^{iv}}{\sin\beta}=\frac{N}{n^{iv}}$$

car, pour l'eau $\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{4}{3}$

Multipliant membre à membre, on obtient la relation simple

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{N}{n}$$

Il n'y a donc pas à s'occuper de la constitution ni des indices de réfraction des couches intermédiaires.

Appliquons maintenant cela à l'atmosphère.

Soit A la distance zénithale apparente de l'astre, A_0 la distance zénithale vraie, λ la réfraction, c.à.d. $\lambda=A_0-A$. — Le rayon lumineux s'avance du vide pour lequel $n=1$, et, après avoir décrit une courbe, arrive en O, à l'observateur. Soit N l'indice de réfraction qui se rapporte au lieu de l'observation. — On aura, d'après le lemme précédent, (voir la fig.)

$$\frac{\sin A_0}{\sin A} = \frac{N}{1} = N.$$

et, comme par hypothèse, A_0 et A sont de très petits angles,

$$\frac{A_0}{A} = N \qquad A_0 = NA$$

$$A_0 - A = (N-1)A = \lambda$$

on peut donc facilement faire la correction quand on connaît N.

Pour déterminer $N-1$ pour chaque observation, remarquons qu'on a donné le nom de puissance réfractive à la quantité n^2-1. — Cette quantité varie proportionnellement à la densité ρ, de sorte que l'on a $n^2-1 = c\rho$. — Mais on a entre la hauteur du baromètre, la densité de l'air, son coefficient de dilatation, et la température, la relation

$$h = K\rho(1+\mu\theta) \qquad K = \text{coeff. constant.}$$

Car $\rho : \rho' :: h(1+\mu\theta') : h'(1+\mu\theta)$ d'où l'on tire $\frac{\rho}{\rho'} = \frac{h(1+\mu\theta')}{h'(1+\mu\theta)}$ et par suite $\frac{\rho(1+\mu\theta)}{h} = \frac{\rho'(1+\mu\theta')}{h'}$ = const. (μ = coeff. de dilat.)

Donc

$$n^2-1 = \frac{ch}{K(1+\mu\theta)}$$

Il suit de là que, connaissant la puissance réfractive pour une température et une pression q.q. on pourra la calculer sous d'autres conditions. — Soit n_0^2-1 la puissance réfractive pour $h_0 = 0,76$ et $\theta_0 = 0°$.

$$n_0^2 - 1 = \frac{c \cdot 0,76}{K}$$

d'où

$$\frac{c}{K} = \frac{n_0^2-1}{0,76}$$

et partant

$$n^2-1 = (n_0^2-1)\frac{h}{0,76}\,\frac{1}{1+\mu\theta}$$

Cette quantité n est très peu différente de l'unité. Car pour les circonstances normales à la surface de la terre, $n_0 = 1,000294$. — On peut donc poser $n = 1+\varepsilon$. $n^2-1 = (n+1)(n-1) = (2+\varepsilon)\varepsilon$, ou bien, en négligeant les carrés, $n^2-1 = 2\varepsilon = 2(n-1)$. — Substituant, on a l'équation à peu près exacte

$$n-1 = (n_0-1)\frac{h}{0,76}\cdot\frac{1}{1+\mu\theta}$$

La quantité cherchée $N-1$ est donc sensiblement proportionnelle à la pression et en raison inverse du binôme de temp. $1+\mu\theta$. — Il suffira donc pour faire la correction 1°. de chercher la distance zénithale apparente, 2°. d'observer le therm. et le barom.

Cette manière d'opérer donne des résultats assez exacts tant que la hauteur zénithale ne dépasse pas 80°.

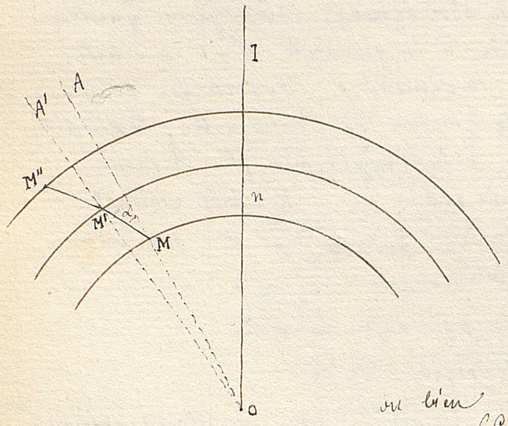
Pour $h = 0,76$ et $\theta = 0$, on a $N-1 = \frac{1}{3400}$.

Pour $h = 0,76$ et $\theta = 16$ — $N-1 = \frac{1}{3600}$.

Ce dernier résultat, qui a lieu pour des circonstances peu éloignées de celles où l'on observe habituellement donne une règle très simple. Car $3600 = 60^2$. Donc $\frac{1}{60^2} = 1''$. — Donc il faut ajouter une seconde par degré pour corriger les effets de la réfraction.

Lorsque la distance zénithale de l'astre dépasse 30°, la formule précédente donne des résultats inexacts. — Nous allons indiquer le principe de la méthode de Laplace.

Cherchons la trajectoire décrite par le rayon lumineux. — À cet effet, considérons deux couches consécutives de l'atmosphère. — Soient MM', M'M'' deux éléments de la courbe rapportée à la verticale OI comme axe polaire.



Soit $MOI = \theta$, $M'OI = \theta + \Delta\theta$

n l'indice de réfraction absolu pour la 1ère couche

$n + \Delta n$ celui de la 2e couche.

$M'MA = \alpha$.

$M''M'A' = \alpha + \Delta\alpha$.

L'angle d'incidence de M'M' sur la 1ère couche est $M''M'A' = \alpha + \Delta\alpha$. L'angle de réfraction est $OM'M = M'MA - M'OM = \alpha - \Delta\theta$.

Nous aurons donc

$$\frac{\sin(\alpha + \Delta\alpha)}{\sin(\alpha - \Delta\theta)} = \frac{n}{n + \Delta n}$$

ou bien

$$(\sin\alpha \cos.\Delta\alpha + \sin.\Delta\alpha \cos\alpha)(n + \Delta n) = n(\sin\alpha \cos.\Delta\theta - \sin.\Delta\theta \cos\alpha)$$

Remplaçant $\cos.\Delta\alpha$ par 1, $\sin.\Delta\alpha$ par $\Delta\alpha$, $\cos.\Delta\theta$ par 1, $\sin.\Delta\theta$ par $\Delta\theta$, nous négligerons des termes du 2e ordre, et comme nous passerons ensuite à la limite, l'équation sera exacte.

$$(n + \Delta n)(\sin\alpha + \Delta\alpha.\cos\alpha) = n(\sin\alpha - \Delta\theta \cos\alpha)$$

ou

$$\Delta n.\sin\alpha + n.\Delta\alpha.\cos\alpha = -n \cos\alpha\, \Delta\theta$$

Passant à la limite

$$dn.\sin\alpha + n\cos\alpha\, d\alpha = -n\cos\alpha\, d\theta$$

Mais on a

$$\operatorname{tg}\alpha = r\frac{d\theta}{dr}, \quad \text{d'où} \quad d\theta = \frac{dr}{r}\operatorname{tg}\alpha, \quad \cos\alpha\, d\theta = \frac{dr}{r}\sin\alpha$$

Substituant

$$\sin\alpha.dn + n\cos\alpha\, d\alpha = -n\frac{dr}{r}\sin\alpha$$

ou

$$\frac{dn}{n} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}d\alpha + \frac{dr}{r} = 0$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe. — Elle s'intègre immédiatement

$$Ln + L.\sin\alpha + Lr = c$$

ou

$$nr\sin\alpha = C.$$

Cette équation est encore une équation différentielle du 1er ordre, car elle contient $\sin\alpha$.

Il faut déterminer la constante C. — Pour cela, appelons A la distance zénithale apparente de l'astre, c.à.d. la valeur de l'angle α pour le lieu de l'observation. Soit R le rayon de la terre, N l'indice de réfraction de l'air à la surface pour le point considéré. — On aura pour ce point :

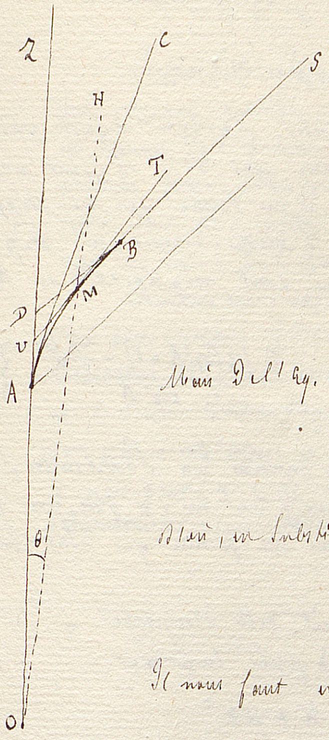
$$nr\sin\alpha = NR\sin A.$$

Donc

$$C = NR\sin A.$$

Cette équation différentielle de la trajectoire va nous permettre de

calculer la Réfraction. — En effet, soit SB le Rayon lumineux qui arrive du vide, BA la trajectoire qu'il décrit dans l'atmosphère, OZ la verticale du point A où se trouve l'observateur.



Prenons un point M sur la trajectoire, menons la tangente MV en ce point, et le rayon vecteur MO qui fait avec la verticale un angle θ. — Soit en outre comme tout-à-l'heure λ l'angle TMH, et soit δ l'angle MVZ.

Nous chercherons $d\delta$, et nous ferons la somme de ses accroissements depuis le point A jusqu'au point B pour avoir $A_0 - A$, c.a.d. λ. La question sera donc ramenée aux quadratures.

On a

$$\delta = \theta + \lambda \quad \text{donc} \quad d\delta = d\theta + d\lambda$$

Mais de l'éq. différentielle je tire

$$\sin \lambda = \frac{NR \sin A}{nr}$$

$$\cos \lambda = \frac{\sqrt{n^2 r^2 - N^2 R^2 \sin^2 A}}{nr}$$

Alors, en substituant dans la valeur $\quad d\theta = \frac{dr}{r} \operatorname{tg} \lambda$

$$d\theta = \frac{NR \sin A \, dr}{r\sqrt{n^2 r^2 - N^2 R^2 \sin^2 A}}$$

Il nous faut encore $d\lambda$. — Pour cela je différentie $\sin\lambda$:

$$\cos\lambda \, d\lambda = \frac{-NR \sin A (n\,dr + r\,dn)}{n^2 r^2}$$

$$d\lambda = -\frac{NR \sin A (n\,dr + r\,dn)}{nr\sqrt{n^2 r^2 - N^2 R^2 \sin^2 A}}$$

Substituant

$$d\delta = -\frac{NR \sin A \, dn}{n\sqrt{n^2 r^2 - N^2 R^2 \sin^2 A}}$$

Intégrant cette expression depuis A jusqu'à B, j'aurai λ

$$\lambda = -NR \sin A \int_N^1 \frac{dn}{n\sqrt{n^2 r^2 - N^2 R^2 \sin^2 A}}$$

ou bien

$$\lambda = NR \sin A \int_1^N \frac{dn}{n\sqrt{n^2 r^2 - N^2 R^2 \sin^2 A}}$$

Si la loi de décroissement de la densité de l'air était connue, on aurait r en fonction de n, et la question serait ramenée à une simple quadrature.

Dans cette formule compliquée il est facile de retrouver le résultat simple auquel nous sommes arrivés dans le cas où l'astre est près du Zénith. — En effet, A étant très-petit, nous pourrons sans grande erreur supprimer $\sin^2 A$.

$$\lambda = NR \sin A \int_1^N \frac{dn}{n^2 r}.$$

n^2 est très peu différent de l'unité. et r diffère peu de R : car les dimensions de l'atmosphère sont négligeables. donc

$$\lambda = NR \sin A \int^N \frac{dn}{R} = N(N-1)\sin A$$

ou bien, en remplaçant sin A par A, et N par 1,

$$\lambda = (N-1)A.$$

En discutant l'intégrale précédente, Laplace a fait voir que, tant que la distance zénithale ne surpasse pas 80°, on peut obtenir une expression de la réfraction composée d'un terme qui ne dépend que de la température et de la pression, plus d'autres termes qui dépendent de la constitution de l'atmosphère, et qui sont négligeables si $A < 80°$. et l'on a

$$\lambda = m \operatorname{Tg} A \left\{ 1 + \frac{\frac{m}{2}(2\cos^2 A + 1) - \frac{h\Delta}{R}}{\cos^2 A} \right\}$$

formule dans laquelle h désigne la hauteur du baromètre, Δ le rapport de la densité du mercure à la densité de l'air, à peu près 10500 ; et m est de la forme $\frac{kh}{1+\mu\theta}$, k représentant un facteur qui doit être déterminé par l'observation.

Nous allons voir comment se fait cette recherche. — Si à la place de m on met sa valeur dans λ, λ prend la forme

$$\lambda = nk + pk^2$$

Soit Z la distance zénithale apparente d'un astre à son passage supérieur on regarde le barom. le therm. et l'on calcule n et p pour cette observation. on aura alors pour la distance zénithale vraie

$$Z + nk + pk^2.$$

au passage inférieur, on calcule n' et p'. soit Z' la dist. zénith. apparente. La distance vraie est

$$Z' + n'k + p'k^2$$

donc

$$Z + Z' + (n+n')k + (p+p')k^2$$

désignera le double de la distance zénithale du pôle. — Répétant les mêmes observations et les mêmes calculs pour une seconde étoile, on aura

$$Z_1 + Z'_1 + (n_1+n'_1)k + (p_1+p'_1)k^2$$

et comme la distance zénithale du pôle est invariable, il faudra égaler ces deux expressions, ce qui donnera une éq. du 2d. degré en k.

La formule ci-dessus est inexacte quand l'astre est trop près de l'horizon, et l'on doit le prévoir puisqu'il y entre un facteur Tg A qui devient très grand dans le voisinage de A = 90°. — Cela tient à ce que les termes que nous avons négligés pour établir la formule ne sont plus négligeables dans cette hypothèse, et même deviennent fort grands, de manière à détruire l'infini provenant de Tg A.

On est obligé dans ce cas de faire sur la constitution de

l'atmosphère diverses hypothèses. — Laplace a discuté ces hypothèses et, en partant de la plus probable, il a trouvé une formule qui s'accorde assez bien avec les observations. Mais il y a toujours un peu d'incertitude dans les résultats trouvés lorsque la distance zénithale approche de 90°.

Quand $Z = 90°$, $\theta = 10°$ et $h = 0{,}76$ on a $\lambda = 34'$.

L'effet de la réfraction astronomique est d'élever les astres au-dessus de leur véritable position. — Et nous pouvons même voir ainsi le ☉ lorsqu'il est au-dessous de l'horizon. — C'est ainsi qu'on a vu en 1750 la Lune éclipsée par la Terre, bien que le Soleil fût encore à l'horizon. — En réalité, la Terre était déjà entre la Lune et le Soleil : mais la réfraction les faisait voir au-dessus de l'horizon.

Ce phénomène explique aussi les apparences que présente le Soleil à son lever et à son coucher. Il semble aplati dans le sens vertical. Cela tient à ce que la réfraction est plus intense pour le bord inférieur que pour le bord supérieur, et le relève davantage. — Ces différences sont plus marquées quand on s'élève sur une montagne voisine de la mer : on peut voir le diamètre horizontal $\frac{1}{5}$ plus grand que le diamètre vertical, et, lorsqu'à cet effet se joignent des circonstances accidentelles, l'astre prend des apparences très-bizarres.

Réfraction Terrestre.

Il y a un autre genre de réfraction qu'il importe de considérer quand on s'occupe de mesures géodésiques. C'est celui où le rayon lumineux, au lieu de traverser toutes les couches de l'atmosphère, n'en traverse que quelques unes : cette réfraction n'influe comme la précédente que sur les distances zénithales des objets, et le rayon apparent est dans le même plan vertical que le rayon réel.

Soient deux points A et B situés un peu au-dessus de la surface de la Terre. — Les rayons lumineux partis de A, au lieu de se propager en ligne droite, décrivent une trajectoire courbe, et l'effet de la réfraction nous serait donné par le calcul précédent si nous connaissions la loi des variations des couches de A en B. — Mais les résultats de cette intégration seraient peu exacts à cause des incertitudes qu'il y a sur la constitution des couches inférieures

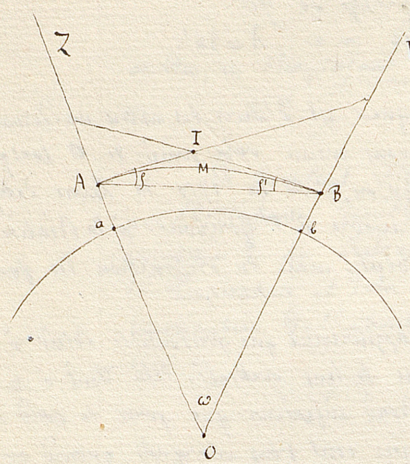


de l'atmosphère, dont la densité varie à chaque instant.

On préfère procéder par l'observation des Distances Zénithales Réciproques.

Concevons qu'à des époques assez rapprochées pour que les couches d'air n'aient pas changé de densité, deux observateurs placés, l'un en A, l'autre en B, déterminent ~~leurs~~ réciproquement leurs distances

Zénithales. Il est évident que si l'observateur en A reçoit un rayon de B suivant la courbe AMB, l'observateur en B voit A suivant la même courbe. Les distances zénithales apparentes seront donc les angles des tangentes AI, BI à AMB avec les verticales correspondantes.



Soit

$ZAI = z$, $VBI = z'$, ω l'angle des deux verticales, et ρ et ρ' les réfractions pour les points A et B. — on a

$$ZAB = \rho + z$$
$$OAB = \pi - (\rho + z)$$
$$OBA = \pi - (\rho' + z')$$

Mais

$$\omega + OAB + OBA = \pi = \omega + 2\pi - \rho - \rho' - z - z'$$
$$\rho + \rho' = \pi + \omega - z - z'.$$

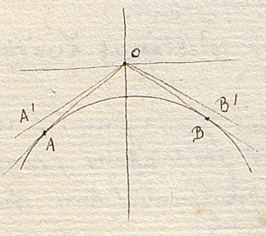
L'angle ω peut être connu, du moins approximativement, quand on connaît la distance ab des projections des points A et B sur la surface de la Terre. — En effet, on peut considérer ab comme un arc de grand cercle et, connaissant approximativement le rayon de la Terre, on en conclura l'angle ω. — Il est permis d'agir ainsi : car l'angle ω est en général très-petit, et l'erreur qu'on commettra dans l'évaluation du rayon terrestre n'aura pas une grande influence. — Nous verrons dans la suite d'autres exemples d'une semblable méthode : dans le calcul des corrections, on suppose connues approximativement certaines quantités, qu'on peut calculer ensuite plus exactement au moyen de ces corrections elles-mêmes.

Admettons maintenant que $\rho = \rho'$. Cette hypothèse est assez justifiée car la trajectoire est très-peu courbe, et si, sur une courbe, on prend un arc très-peu étendu, la corde de cet arc fait des angles sensiblement égaux avec les tangentes aux deux extrémités. — Il n'y a d'exception que lorsque la courbe a des contours très-irréguliers.

On a alors

$$\rho = \frac{\pi}{2} - \frac{z + z' - \omega}{2}$$

Il y a un autre effet de la réfraction dont la connaissance est indispensable aux marins. — Nous avons vu qu'ils se servent du sextant pour mesurer la distance zénithale du Soleil, et qu'ils prennent alors le bord inférieur du disque du Soleil et le bord apparent de la mer pour leurs observations. — Mais ce bord apparent de la mer est bien loin de coïncider avec le plan tangent à la surface terrestre au point de l'observation. En effet, supposons qu'il n'y ait pas de réfraction : à cause de la courbure de la Terre, le bord de la mer est au-dessous de l'horizon, et l'on pourrait, connaissant la hauteur du point de l'observation au-dessus du niveau de la mer, calculer cette dépression. Mais la réfraction terrestre influe encore ici : si bien que le bord apparent de la mer peut quelquefois se trouver au-dessus du plan horizontal.



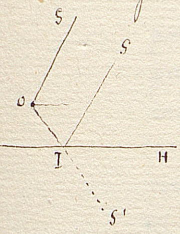
Wollaston a inventé un instrument avec lequel on peut mesurer la dépression. — avec cet instrument, on trouve l'angle apparent de deux objets A et B situés aux extrémités d'un même diamètre de l'horizon apparent: les rayons OA, OB, sont relevés en OA', OB', et l'on peut admettre dans les circonstances normales que ces deux effets sont égaux: de sorte que l'angle A'OB' retranché de 180° fera connaître le double de la dépression de l'horizon.

Dans une foule de circonstances, de température et de constitution de l'atmosphère, on a mesuré cette dépression, et l'on a ainsi construit des tables qu'on peut consulter quand on fait des corrections. — Néanmoins, il faut le dire, ces corrections offrent toujours une assez grande incertitude: car les dépressions peuvent être affectées de perturbations accidentelles.

Un moyen d'éviter ces erreurs est de se servir de ce que l'on appelle des **Horizons artificiels**.

1°. **Sur Terre**:

On dispose une surface parfaitement horizontale, qui sera une masse de Mercure ou un plan de glace bien dressé qu'on place horizontalement à l'aide de 3 vis et d'un niveau à bulle d'air. — L'astre dont on veut mesurer la distance zénithale se réfléchit sur cet horizon artificiel, de sorte qu'on peut mesurer l'angle de deux rayons visuels dirigés l'un sur l'astre S, l'autre sur ~~l'a~~ son image S'. — L'angle de ces deux rayons est le double de la hauteur de l'astre au-dessus de l'horizon. — On observe cet angle avec le sextant. Pour cela, on tient l'instrument à la main, de manière que son limbe soit dans le plan vertical mené par l'astre. On observe directement S', et l'on fait tourner le grand miroir jusqu'à ce que l'astre S vu par double réflexion devienne tg.^t à son image.



Quand on prend pour horizon artificiel la surface du mercure, il faut qu'il soit renfermé dans un vase d'assez grandes dimensions en longueur et en largeur afin d'éviter la convexité de la surface provenant de la dépression le long des parois du vase. Il faut aussi enfermer le Mercure dans une cage de verre pour le soustraire aux agitations de l'air: les lames de verre devront être à faces bien parallèles.

2°. **Sur mer**:

On suspend le vase qui renferme le Mercure par le mode connu sous le nom de **Suspension de Cardan**, afin d'avoir une surface sensiblement indépendante des agitations de la mer et du navire.

Il est inutile de tenir compte, dans l'emploi des tables de réfraction, de la quantité d'eau contenue dans l'air. — En effet, la vapeur d'eau peut être regardée comme remplaçant une certaine quantité d'air. Supposons que la puissance réfringente de l'eau liquide reste la même à l'état de vapeur, avec la seule diminution due au rapport des densités. On pourra calculer quelle serait la réfraction produite par une vapeur aqueuse d'une densité égale à celle de l'air. On trouve ainsi que cette vapeur réfracterait un peu plus que

l'air atmosphérique. — Mais la vapeur d'eau suspendue dans l'air n'a pas une densité égale à celle de l'air; elle n'en est que les $\frac{5}{8}$ en plus, et habituellement. — Il faut donc ramener à ce terme l'action réfringente de la vapeur d'eau pour la rendre conforme aux effets qu'elle produit réellement dans l'atmosphère. — Cette force réfringente ainsi réduite se trouve exactement égale à celle de l'air sous la même pression.

Ainsi, dans le calcul des réfractions, on peut se dispenser de distinguer ce qui appartient à l'air et à la vapeur, et supposer que toute la déviation du rayon lumineux est produite par une masse d'air atmosphérique à la pression indiquée par le baromètre.

Mesure Exacte des Dimensions de la Terre.

La Terre, comme nous l'avons vu, a la forme d'un Sphéroïde, mais jusqu'à présent, nous ne savons rien sur la nature de sa surface. – Il importe donc de définir rigoureusement ce qu'on entend par Pole, Latitude, Méridien, sans faire aucune hypothèse sur sa constitution.

Nous appellerons Verticale d'un lieu la normale à la surface des mers prolongées jusqu'en ce lieu au-dessous des continents.

Sur une surface convexe, il y a toujours deux points pour lesquels la normale est parallèle à une direction donnée.

Nous désignerons par Poles de la surface terrestre les points de cette surface pour lesquels les normales seront parallèles à l'axe de la Sphère céleste.

Par Méridien Terrestre, on entend le lieu des points de la surface pour lesquels la verticale est parallèle à un même méridien céleste. – On voit par cette définition que tous les méridiens passent par les poles, et que ces méridiens sont généralement des lignes à double courbure.

Par Plan Méridien d'un lieu, on entend le plan qui contient la verticale de ce lieu et la parallèle à l'axe de la Sphère céleste. – Ce plan est évidemment parallèle au plan du méridien céleste correspondant au lieu dont il s'agit.

Si l'on prend à la surface de la Terre un premier méridien pour origine, la Longitude des points situés sur un second méridien sera l'angle compris entre les plans des deux méridiens célestes correspondants. Ces longitudes se comptent de 0 à 180°, à l'E. et à l'O.

L'angle que la verticale d'un lieu fait avec le plan de l'Equateur céleste est la Latitude de ce lieu. – On peut encore dire que c'est le complément de l'angle de la verticale du lieu et l'axe de la Sphère céleste.

Un Parallèle Terrestre est le lieu géométrique des points qui ont la même latitude. C'est une ligne à double courbure.

En particulier, le lieu des points pour lesquels la latitude est zéro est l'Equateur Terrestre.

Si l'on suppose que la Terre soit de révolution autour d'un axe parallèle à l'axe de la Sphère céleste, les définitions précédentes se simplifient.

Les Poles sont les extrémités de l'axe de révolution.

Un Méridien est la courbe d'intersection de la surface avec un plan passant par l'axe de révolution. Car il est évident que les normales aux différents points de cette courbe sont parallèles à un même méridien céleste.

Un Parallèle est un cercle dont le plan est perp. à l'axe de révolut. Car dans tous les points de ce cercle, les normales font le même angle avec l'axe : leur latitude est donc la même.

Toutes ces définitions deviennent encore un peu plus simples si la surface de la Terre est sphérique.

Supposons la Terre sphérique, et proposons-nous de chercher son rayon. Pour le trouver, il suffit de connaître la longueur d'un arc de grand cercle correspondant à un angle au centre connu. Et comme le méridien est, de tous les grands cercles, le plus facile à trouver et à tracer, c'est un arc de méridien qu'on a cherché à mesurer.

Supposons qu'on puisse exécuter cette opération dans de grandes plaines, comme on avait commencé à le faire en Pensylvanie, où Mason et Dixon, en 1768, ont tracé une ligne méridienne, et voyons la série des opérations à exécuter.

On s'établit dans une station A ; on y place une lunette mobile dans autour d'un axe horizontal, l'axe optique étant perp. à cet axe, et on la dispose de manière que cet axe optique parcoure le plan du méridien du lieu. Cette opération est analogue à l'établissement d'une lunette méridienne.

Cela fait, à une certaine distance vers le Nord, on place une mire B de façon qu'on puisse l'apercevoir dans la lunette méridienne. Puis, on se transporte en B. on y dispose la lunette de manière à viser A ; on la retourne vers le N. bout pour bout, de façon à placer une nouvelle mire en C. En C on fait la même chose qu'en B, et l'on obtient ainsi une série de points A, B, C, D, E, .. qui feraient partie du méridien du point A si la Terre était sphérique ou de révolution. — En effet, d'après la manière d'opérer, on est sûr que le 1er élément AB est dans le méridien du point A, qu'il en est de même du 2e élément et des suivants.

Mais si la Terre était une surface quelconque, cela ne serait plus vrai : la ligne ainsi tracée serait seulement tangente en A au méridien : elle serait une ligne géodésique, c.à.d. une ligne jouissant de la propriété d'être la plus courte entre deux de ses points.

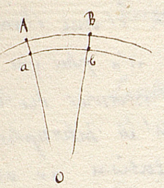
En effet, en B, nous avons rendu l'axe de la lunette horizontal, et nous avons tracé les deux éléments AB, BC dans un plan perpendiculaire à l'axe, c.à.d. dans un plan vertical. — Ainsi le plan de deux éléments consécutifs, lequel est le plan osculateur de la courbe, est vertical, c.à.d. qu'il contient la normale à la surface : c'est donc une ligne géodésique.

Revenons à l'hypothèse que la Terre est sphérique, et continuons l'opération. — Il nous faut la longueur de l'arc de grand cercle que nous venons de tracer, et l'angle des rayons extrêmes qui le comprennent.

Cet angle n'est pas difficile à mesurer : c'est la différence des distances zénithales du pôle pour les points extrêmes.

Quant à la mesure de l'arc de cercle, elle se fait à l'aide de règles qu'on place les unes au bout des autres, et qui sont garnies de pinnules pour qu'on puisse s'assurer qu'on les a bien placées dans la direction voulue. Un toit en bois les préserve du soleil et d'une trop grande dilatation. Un thermomètre particulier rend les corrections faciles. Enfin il faut avoir soin de bien les tenir horizontales.

Rem. importante. — Ce qu'il faut mesurer ; c'est non pas AB, mais sa projection ab sur la surface de la mer. — Voyons comment on conclut ab de AB.



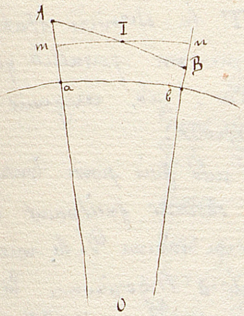
Supposons d'abord que les points A et B soient à la même hauteur h au-dessus de ce niveau. — on aura

$$\frac{ab}{AB} = \frac{R}{R+h}$$

$$ab = AB \cdot \frac{R}{R+h}$$

et, comme on a déjà une valeur approchée du Rayon de la Terre, on pourra faire cette correction.

Si les points A et B sont à une hauteur différente, et $Aa > Bb$, on peut imaginer par le milieu de l'arc AB un arc de cercle mn. C'est la longueur de cet arc qui a été mesurée dans les opérations précédentes. On en conclura ab comme tout-à-l'heure, en prenant



$$h = \frac{Aa + Bb}{2}$$

Nous verrons bientôt comment se trouvent ces hauteurs.

Soit ad l'arc mesuré, α l'angle au centre. — on aura

$$ad : 2\pi R :: \alpha : 360$$

$$R = \frac{360 \cdot ad}{2\pi\alpha} = \frac{180 \cdot ad}{\pi \cdot \alpha}.$$

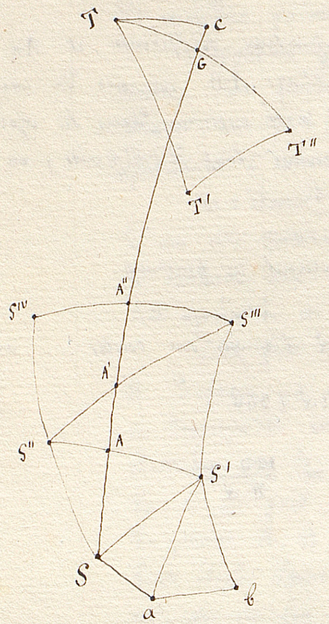
Lorsque la nature du terrain ne permet pas d'employer cette méthode, on en suit une autre qui permet de déterminer par de simples calculs trigonométriques la direction du méridien, et de mesurer en même temps sa longueur. — C'est cette méthode qu'on emploie pour toutes les grandes opérations géodésiques.

On ne calcule alors la ligne géodésique qu'à l'aide de procédés trigonométriques dans lesquels on n'a à mesurer directement que des angles, opération que l'emploi du cercle répétiteur rend susceptible de la plus grande précision. Cette mensuration se fait sans que la ligne soit tracée, ni même indiquée par des points placés de distance en distance sur sa direction comme nous l'avons supposé : — il suffit de connaître la direction du premier élément de cette ligne.

Le procédé consiste à former une série de triangles dont on connaît les éléments, et qu'on dirige de manière qu'ils soient traversés par la ligne qu'on veut mesurer. — on calcule trigonométriquement les segments de cette ligne compris dans les triangles, et l'on en conclut la longueur de la ligne. — Dans le cours des opérations, on calcule les segments que la ligne détermine sur différents côtés des triangles, de sorte que des points de la ligne se trouvent ainsi connus, de distance en distance, et la ligne est déterminée comme elle eût pu l'être par les opérations directes dont nous avons parlé.

Pour déterminer les éléments des triangles, il suffit de connaître une base prise arbitrairement, et dont on aura mesuré la longueur à la manière ordinaire, en portant des règles bout à bout, et en ayant soin de tenir compte des variations de longueur de ces règles causées par

les changements de température. — Cette mesure directe d'une base est une des opérations les plus délicates de la Géodésie. — Ensuite, on n'a plus que des angles à mesurer et des calculs trigonométriques à effectuer pour mesurer les triangles auxiliaires, et déterminer la longueur des segments qu'ils interceptent. — L'ensemble des triangles ainsi tracés forme une triangulation ou un canevas trigonométrique.



Soit SAA'... la direction du méridien passant par le point S, et $SS'S''S'''$... la chaîne des triangles qu'on a choisis, A, A'.. les points où la direction (non tracée) du méridien vient à rencontrer les côtés des triangles; et T la dernière station. Du point T on imagine un parallèle qui rencontre en C le méridien. La longueur SC est celle qu'il s'agit de mesurer.

Soit ab la base mesurée une fois pour toutes, au moyen de laquelle on peut calculer facilement SS'. Elle est supposée réduite au niveau de la mer, et tous les angles sont réduits à l'horizon. En outre les triangles qui relient cette base à SS' sont toujours assez petits pour pouvoir être considérés comme rectilignes sans erreur sensible. — On mesure au théodolite l'angle de SS' avec la direction du méridien, et l'on calcule SA dans le triangle SAS' dont un côté et deux angles sont connus. Ce triangle, en général, est trop étendu pour qu'on puisse le regarder comme plan. On le résout d'après une méthode que nous indiquerons plus tard. — Connaissant SA, le triangle sphérique SAS' nous donnera la longueur $S''A$. D'autre part l'angle $SAS' = S''AA'$, puisque le méridien est plan. — Donc dans le triangle $S''AA'$, on pourra calculer AA'. — Et ainsi de suite.

Quant à la dernière station, l'arc de parallèle qu'on mène par le point se confond sensiblement avec l'arc de grand cercle perp. au méridien abaissé du point T. On pourra donc traiter approximativement le triangle TCG comme un triangle sphérique rectangle en C.

Telle est la marche générale qu'il faut suivre dans le tracé d'un méridien. — Nous allons faire maintenant diverses remarques.

1°. Observation sur le choix des stations, et réduction des angles au centre de station.

Lorsque les stations que l'on choisit sont des objets visibles de loin, comme un clocher, la flèche d'un bâtiment élevé, il n'y a d'autre difficulté que de réduire les angles au centre de station: car il est impossible, pour mesurer ces angles, de se transporter en ces points mêmes, ou bien de se placer juste aux points qui sont leurs projections. — On est obligé de se mettre à quelque distance, et

déduire de l'observation les résultats qu'on eût obtenus dans le premier cas.

Cette correction est connue sous le nom de Réduction des angles au centre de Station.

C'est un problème connu de Trigonométrie Sphérique.

Quant aux Stations qui n'ont pas de points remarquables, on a recours à des signaux artificiels.

2°. Remarque sur la ligne que nous avons tracée à la surface de la Terre, en supposant cette surface quelconque, et non plus sphérique.

Dans ce cas, la ligne SAA'.. n'est plus plane; mais elle est inscrite dans une infinité de petites facettes planes SS'S",... circonscrites à la surface de la Terre, et de plus, deux éléments consécutifs font des angles au sommet égaux avec une même arête de cette surface polyédrique. — Il est facile de voir qu'une ligne ainsi construite est une ligne Géodésique de ce polyèdre: car si on relève successivement les diverses faces dans un même plan, la ligne en question se développera suivant une ligne droite.

3°. Remarque sur le calcul des triangles sphériques de la triangulation. Méthode de Legendre.

Comme les triangles tels que SS'S" sont un peu grands, que l'on a toujours calculé les angles réduits à l'horizon, et que le plan tangent aux différents sommets n'est pas le même, il est convenable de les calculer en supposant la Terre sphérique.

Dans une aussi petite étendue, l'hypothèse est permise, et, quelle que soit la forme réelle de la Terre, les erreurs qui en résulteront seront infiniment petites. — D'autre part, la correction que nous allons faire contiendra le Rayon de la Terre, ou plutôt une valeur approchée de ce Rayon. Mais comme le Rayon ne multipliera qu'une quantité très-petite, les erreurs seront négligeables.

Soient A, B, C les 3 angles, a, b, c les trois côtés d'un triangle sphérique, α β γ les 3 côtés correspondants dans une sphère de Rayon 1. On aura

$$\alpha = \frac{a}{R} \qquad \beta = \frac{b}{R} \qquad \gamma = \frac{c}{R}$$

et en substituant dans la formule fondamentale de la Trigonométrie Sphérique,

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A$$

Développons en séries:

$$1-\frac{a^2}{2R^2}+\frac{a^4}{2.3.4.R^4} = \left(1-\frac{b^2}{2R^2}+\frac{b^4}{2.3.4.R^4}\right)\left(1-\frac{c^2}{2R^2}+\frac{c^4}{2.3.4.R^4}\right) + \left(\frac{b}{R}-\frac{b^3}{2.3.R^3}\right)\left(\frac{c}{R}-\frac{c^3}{2.3.R^3}\right)\cos A$$

Développons les calculs, effaçons 1 de part et d'autre, et multiplions par $2R^2$:

$$-a^2+\frac{a^4}{12R^2}=-c^2+\frac{c^4}{12.R^2}-b^2+\frac{b^4}{12R^2}+\frac{b^2c^2}{2R^2}+\left(2bc-\frac{b^3c}{3R^2}-\frac{bc^3}{3R^2}\right)\cos A$$

$$a^2-\frac{a^4}{12R^2}=b^2+c^2-2bc\cos A-\frac{b^4+c^4}{12R^2}-\frac{b^2c^2}{2R^2}+\frac{bc(b^2+c^2)}{3R^2}\cos A$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A+\frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2+4bc(b^2+c^2)\cos A}{12R^2}$$

Soient A' B' C' les angles du triangle sphérique dont les côtés seraient a, b, c. on aurait

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A'$$

Retranchant

$$2bc(\cos A-\cos A')=\frac{a^4-b^4-c^4+6b^2c^2+4bc(b^2+c^2)\cos A}{12R^2}$$

on voit déjà que Cos A diffère bien peu de Cos A' puisque leur différence est une fraction où R^2 entre en dénominateur.

Or on a

$$\cos A-\cos A'=2\sin\frac{A'-A}{2}\sin\frac{A'+A}{2}$$

à la place de $\sin\frac{A'-A}{2}$ mettons donc $\frac{A'-A}{2}$; nous négligerons une quantité infiniment petite par rapport à A'−A : de même, à la place de $\sin\frac{A'+A}{2}$ mettons Sin A'. Nous aurons

$$2bc(A'-A)\sin A'=\frac{a^4-b^4-c^4+6b^2c^2+4bc(b^2+c^2)\cos A'}{12R^2}$$

en remplaçant Cos A par Cos A', ce qui est toujours une erreur de l'ordre $\frac{1}{R^4}$.

Remarquons que bc Sin A' = 2 fois la surface du triangle rectiligne dont nous avons parlé, et dont nous désignerons par S la surface.

$$A'-A=\frac{a^4-b^4-c^4+4bc(b^2+c^2)\cos A'+6b^2c^2}{48.S.R^2}$$

Mais on a

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A'$$

$$2bc\cos A'=b^2+c^2-a^2$$

Par suite

$$A'-A=\frac{a^4-b^4-c^4+6b^2c^2+2(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)}{48\,S.R^2}$$

$$=\frac{a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2a^2b^2-2a^2c^2}{48.S.R^2}$$

Mais on a

$$S^2=\frac{1}{16}\left(-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2a^2b^2+2a^2c^2\right)$$

Donc

$$A'-A=-\frac{16S^2}{48.S.R^2}$$

$$A-A'=\frac{S}{3R^2}$$

On aurait pu d'ailleurs se passer de la formule qui donne la surface du triangle rectiligne, et remarquer que A'−A est symétrique par rapport à a, b, c. Donc

$$A'-A=B'-B=C'-C.$$

Par suite chacune de ces différences est égale au tiers de leur somme,

Savoir

$$\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}(A+B+C)$$

Or la surface du triangle sphérique ABC est donnée par la formule

$$S' : \frac{\pi R^2}{2} :: A+B+C-\pi : \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{S'}{R^2} = A+B+C-\pi$$

on a donc

$$A-A' = \frac{S'}{3R^2}$$

$$B-B' = \frac{S'}{3R^2}$$

$$C-C' = \frac{S'}{3R^2}$$

et comme S' ne diffère de S que d'un infiniment petit de l'ordre $\frac{1}{R^2}$,

$$A-A' = \frac{S}{3R^2}$$

$$B-B' = \frac{S}{3R^2}$$

$$C-C' = \frac{S}{3R^2}$$

qui est le résultat précédent, mais obtenu plus rapidement.
ainsi l'on a

$$A' = A - \frac{S}{3R^2}$$

$$B' = B - \frac{S}{3R^2}$$

$$C' = C - \frac{S}{3R^2}$$

$$A'+B'+C' = A+B+C - \frac{S}{R^2}$$

Cette quantité $\frac{S}{R^2}$ s'appelle l'excès sphérique.

Théorème.

Si l'on considère un triangle sphérique très peu courbe, et le triangle rectiligne dont les côtés sont égaux en longueur à ceux du triangle sphérique, les angles de ce triangle rectiligne diffèrent de ceux du triangle sphérique d'une quantité constante qui est le tiers de l'excès sphérique.

Ce théorème est d'une grande utilité dans le calcul des triangles du réseau trigonométrique.

Ces triangles sont de plusieurs espèces.

Quand leurs trois sommets sont trois stations, comme SS'S'', on peut calculer facilement l'excès sphérique en faisant la somme des trois angles et retranchant 2 droits.

Quand il s'agit d'un triangle tel que SS'A, dans lequel on ne connaît qu'un côté et deux angles adjacents, on résout le

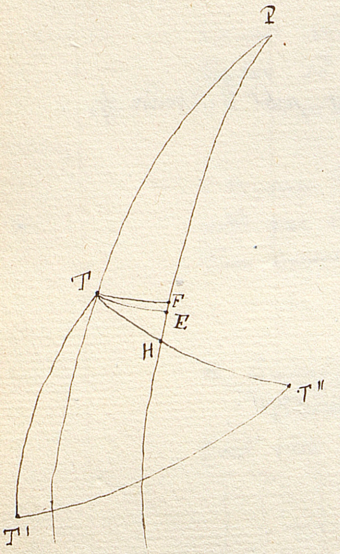
triangle comme Rectiligne, ce qui donne S, par suite $\frac{S}{R^2}$. — on pose alors

$$S_1 = S - \frac{S}{3R^2}$$

$$S'_1 = S_1 - \frac{S}{3R^2}$$

et l'on résout le triangle comme Rectiligne, ce qui donne SA.

4°. — Particularité pour le calcul du petit triangle qui détermine le dernier élément du Méridien.



Il faudrait mener par le point T un parallèle TE. Mais alors on n'aurait pas un triangle sphérique. alors on mène un arc de g^d. cercle perp. TF. on calcule FH dans le triangle sphérique Rectangle TFH. Puis on retranche la distance FE que nous allons calculer.

Soit P le pôle, TP le méridien du point T. on a

$$PT = PE.$$

$$EF = EP - PF = PT - PF$$

Le triangle sphérique Rectangle PTF donnera

$$\cos TP = \cos TF \cos PF$$

$$\cos PF = \frac{\cos PT}{\cos TF}$$

Soit $PT = \alpha$, $TF = \beta$, $PF = \gamma$. d'où $EF = \alpha - \gamma$.

$$\cos\gamma = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

$$\cos\gamma - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{\cos\alpha(1-\cos\beta)}{\cos\beta} = \frac{2\cos\alpha\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$$

or $\alpha - \gamma$ est très-petit. Nous aurons donc

$$(\alpha-\gamma)\sin\alpha = \frac{\cos\alpha \cdot \beta^2}{2}$$

car $TF = \beta$ est aussi très-petit.

$$\alpha - \gamma = \frac{\beta^2}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$$

En opérant ainsi à diverses latitudes, on trouve pour l'arc de 1° des valeurs différentes. D'où l'on conclut que le méridien n'est pas un cercle. Mais aux mêmes latitudes, sur différents méridiens, on trouve des valeurs sensiblement concordantes; et d'un autre côté, si l'on mesure des arcs de parallèles, on trouve que sur un même parallèle des arcs correspondant à des différences égales en longitude sont sensiblement égaux. Delà on conclut que la Terre n'est pas sphérique, mais qu'elle est sur-

-siblement de Révolution : de sorte que les Lignes Géodésiques que nous avons trouvées sont de véritables Méridiens.

Pour bien faire voir la forme de ce méridien, nous citerons quelques nombres.

On a mesuré au Pérou (Bouguer et Lacondamine) un arc dont la distance moyenne au pôle était de 88° 28' 39", et l'on a trouvé pour l'arc de 1°.

56 737 Toises

Dans l'Inde, un anglais a mesuré un arc de Méridien dont la dist. moy. au pôle était 77° 27' 39". Il a trouvé

56762 T

Delambre et Méchain en France, Arago et Biot en Espagne, ont mesuré l'arc de méridien de l'île de Formentera à Dunkerque, dont la dist. moyenne au pôle est 43° 51' 54". d'où

57025 T

Ecosse et angleterre, 37° 57'40"

57066 T

En Laponie (Clairault et Maupertuis), par 23° 39' 50"

57196 T

De là résulte que la longueur de l'arc de 1° va en diminuant du Pôle à l'Equateur, et par suite, que la courbure du méridien va en augmentant. – En effet, l'arc de 1° est un arc tel que les normales menées aux extrémités forment un angle de 1°. On aura donc pour la courbure moyenne d'un pareil arc $\frac{ds}{\text{angle de } 1°}$. Or ds va en diminuant du Pôle à l'Equateur. Donc la courbure moyenne du méridien va en augmentant, et le Rayon de courbure diminue.

De là résulte évidemment l'aplatissement de la Terre aux pôles. En effet, pour décrire le méridien à l'aide d'une série d'arcs de cercle, il faudra que les Rayons de ces arcs aillent toujours en augmentant de l'Equateur aux pôles, où le Rayon sera maximum.

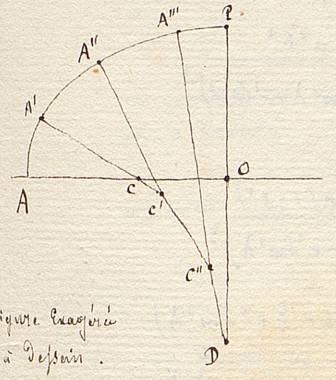


Figure exagérée à dessein.

Soit D le centre de courbure du Pôle P. on a

$$CC'C''D < CO + OD$$

d'où

$$AC + CC'C''D < AO + OD$$

mais on peut écrire

$$AC + CC' + C'C'' + C''D < AO + OD$$

et l'on a

$$AC = A'C$$

$$AC + CC' = A'CC' = A''C'$$

$$AC + CC' + C'C'' = A''C'C'' = A'''C''$$

$$AC + CC' + C'C'' + C''D = A'''C''D = PD$$

donc

$$PD < AO + OD$$

$$PO < AO$$

ainsi la distance du pôle à l'Equateur est plus petite que celle de l'Equateur à l'axe.

Il faut en outre savoir suivant quelle loi cet aplatissement a lieu.

Or le calcul fait sur les données expérimentales montre que la courbure croît proportionnellement au carré du sinus de la latitude, de sorte que si ρ_0 est le rayon à l'Equateur, et ρ le rayon à la latitude λ, on a

$$\rho = \rho_0 + c \sin^2 \lambda$$

Or ceci est une des propriétés d'une ellipse peu aplatie. Car on a pour l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad a^2 - b^2 = a^2e^2$$

$$\rho = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

Pour y introduire la latitude, il faut remarquer qu'elle est égale à l'angle de la normale avec l'axe des x. On aura donc, en appelant λ cette latitude.

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{a^2y}{b^2x} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

D'où

$$\frac{ay}{b\sin\lambda} = \frac{bx}{a\cos\lambda} = \frac{ab}{\sqrt{b^2\sin^2\lambda + a^2\cos^2\lambda}}$$

et par suite

$$y = \frac{b^2\sin\lambda}{\sqrt{b^2\sin^2\lambda + a^2\cos^2\lambda}}$$

$$x = \frac{a^2\cos\lambda}{\sqrt{b^2\sin^2\lambda + a^2\cos^2\lambda}}$$

Substituant, il vient

$$a^4y^2 + b^4x^2 = \frac{a^4b^4\sin^2\lambda + a^4b^4\cos^2\lambda}{b^2\sin^2\lambda + a^2\cos^2\lambda} = \frac{a^4b^4}{b^2\sin^2\lambda + a^2\cos^2\lambda}$$

$$(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^6b^6}{(b^2\sin^2\lambda + a^2\cos^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\rho = \frac{a^2b^2}{(b^2\sin^2\lambda + a^2\cos^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}$$

Remplaçant b^2 par $a^2(1-e^2)$, et réduisant

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}$$

ou, développant en série,

$$\rho = a(1-e^2)\left(1 + \tfrac{3}{2}e^2\sin^2\lambda\right)$$

$$\rho = a\left\{1 + e^2\left(\tfrac{3}{2}\sin^2\lambda - 1\right)\right\}$$

en négligeant e^4.

On voit donc que le méridien est une ellipse, mais une ellipse très peu aplatie.

On voit en outre que, pour déterminer e et a, il suffirait de déterminer pour deux latitudes différentes l'arc de 1°. — Car on en con-

aurait deux valeurs du rayon de courbure, et par suite deux équations entre a et e. — Elles seraient

$$\rho = a(1-e^2) + \frac{3}{4} a e^2 \sin^2 \lambda$$

$$\rho' = a(1-e^2) + \frac{3}{4} a e^2 \sin^2 \lambda'$$

au lieu de calculer l'excentricité e, on cherche d'ordinaire l'aplatissement, qui est égal à

$$\frac{a-b}{a} = \varepsilon$$

Il est facile de le trouver au moyen de e.

$$b = a\sqrt{1-e^2}$$

$$\varepsilon = 1 - \sqrt{1-e^2} = 1 - \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) = \frac{e^2}{2}$$

en négligeant les puissances supérieures à la seconde.

Nous aurons donc bien aisément l'aplatissement, par suite $b = a(1-\varepsilon)$

Dans ces déterminations, on ne se contente pas de deux observations, mais on les combine toutes afin d'avoir des résultats plus exacts. — on suit dans le calcul la méthode des moindres carrés.

Les mesures qu'on s'accorde le plus généralement à regarder comme exactes sont celles qui résultent de la combinaison de l'arc du Pérou et de l'arc compris entre la France et l'Espagne.

on trouve alors

$$a = 3\,271\,985^T = 6\,377\,218^m$$

$$b = 3\,261\,291 = 6\,356\,180$$

$$a-b = 10\,694 = 21\,038$$

$$\varepsilon = \frac{1}{305}$$

On peut calculer la longueur du quart du méridien. En effet, l'arc d'ellipse dont le $\frac{1}{2}$ gd. axe est a a pour expression

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1-e^2 \sin^2\varphi}$$

en développant la quantité sous le signe $\int$ d'après les puissances croissantes de e, on a trouvé

$$5\,131\,276^T$$

Le mètre sera donc

$$0^T,5131276$$

ou

$$443^l,342$$

Quand on a fixé la longueur légale du mètre, on n'avait pas mesuré encore tout l'arc de Dunkerque en Espagne. — sa longueur légale est un peu différente

$$0^T,5131720$$

ou

$$443^l,296$$

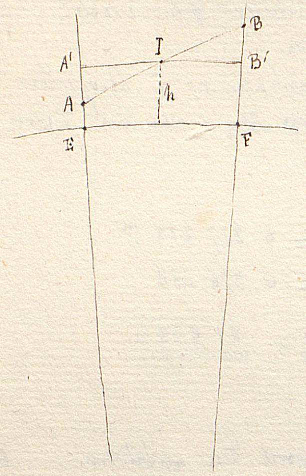
on l'a conservée, malgré la légère erreur qui s'y trouve.

On a trouvé quelques irrégularités dans la longueur des arcs comptés

sur un même méridien. Mais ce ne sont que des déviations locales, qui indiquent que la terre n'est pas homogène, par suite, que l'attraction vers le centre n'est pas la même en tous les points, et que la surface des mers n'est pas exactement de révolution.

En outre, les deux hémisphères ne paraissent pas être parfaitement identiques. — La longueur de l'arc de 1°. mesuré au Cap de Bonne-Espérance par Lacaille a été trouvée de 57027 T. Or la latitude du Cap est de 30°, c.a.d. qu'elle est plus petite que celle de l'arc mesuré en France. On aurait donc dû trouver l'arc de 1°. notablement plus petit qu'en France, tandis qu'il est le même.

Observation sur la Réduction d'une longueur mesurée à la surface de la terre, à ce qu'elle serait au niveau de la Mer.



Soit AB une pente uniforme sur laquelle se trouvent deux points A et B dont on mesure la distance. Il s'agit de savoir ce que serait cette distance si l'on avait pris, au lieu des points A et B leurs projections E, F sur le niveau de la mer. — Par le point I, milieu de AB, menons A'B', parallèle à EF. L'arc AB est sensiblement égal à A'B'. Par conséquent, tout revient à passer de l'arc A'B' à l'arc AB. EF. La hauteur du point I au-dessus du niveau est sensiblement égale à la demi-somme des hauteurs des points A et B. — Si donc on connaissait ces dernières, à l'aide d'un calcul précédemment indiqué, on arriverait au résultat.

$$EF = AB \cdot \frac{r}{r+h} = AB\left(1 - \frac{h}{r+h}\right)$$

ce qu'on peut écrire

$$EF = AB\left(1 - \frac{h}{r}\right)$$

en négligeant $\frac{h^2}{r(r+h)}$.

Tout revient donc à la détermination des hauteurs des stations A et B au-dessus du niveau de la mer.

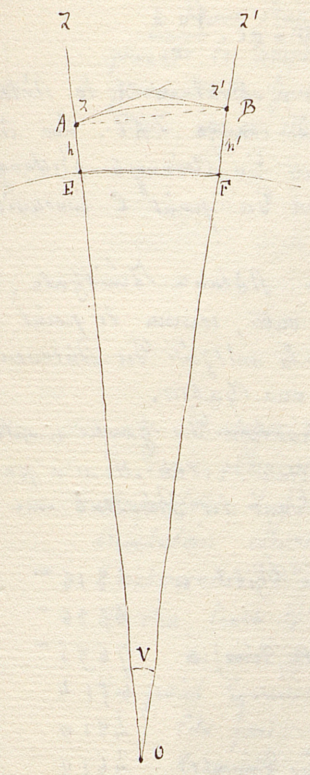
Il y a différents moyens.

D'abord, on peut faire usage du baromètre.

Mais l'usage des instruments d'astronomie peut conduire aussi au même résultat quand on peut relier la station A au bord de la mer par une série de stations intermédiaires: cela revient à une série de nivellements.

Cela suppose que les stations sont peu rapprochées. — Si elles sont en petit nombre, on procède autrement. — Après avoir déterminé pour la dernière station T sa hauteur au-dessus de la mer, en entendant par niveau de la mer la moyenne entre les niveaux des hautes mers et des basses mers, on procède à la recherche de la différence des

hauteurs de deux stations voisines à l'aide de la mesure des hauteurs zénithales réciproques. — Nous allons indiquer ce procédé pour les stations A et B par exemple.



Soient y et y' les hauteurs de ces stations. — on connaît h. Il faut trouver $y' = h + x$.

En A, on observe la distance zénithale de B, ou du moins sa distance zénithale apparente z. La dist. zénithale vraie est $z + \delta$. En B on observe la distance zénithale z' de A: sa dist. zén. vraie est $z' + \delta'$. — Soit v l'angle des deux rayons menés aux points A et B. Cet angle est facile à calculer quand on connaît approximativement la distance EF.

Considérons le triangle OAB. Ses angles sont

$$v \qquad \pi - z - \delta \qquad \pi - z' - \delta'$$

Ses côtés sont

$$r + h \qquad r + h' \qquad AB$$

Écrivons que la somme des deux premiers côtés est à leur différence comme la tangente de la demi-somme des angles opposés est à la tangente de leur demi-différence. Nous aurons

$$\frac{2r + h + h'}{h' - h} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi - v}{2}}{\operatorname{tg} \frac{z' - z + \delta' - \delta}{2}} = \frac{\operatorname{Cot.} \frac{v}{2}}{\operatorname{tg} \frac{z' - z}{2}}$$

en supposant $\delta' = \delta$, ce qui n'entraîne pas une grande erreur. Donc

$$\frac{2r + 2h + x}{x} = \frac{\operatorname{Cot} \frac{v}{2}}{\operatorname{tg} \frac{z' - z}{2}}.$$

On évite ainsi de déterminer δ et δ', ce qui serait difficile, et demanderait des observations exactes. — On ne peut guère compter sur les nombres qui se trouvent dans les tables, parce que les circonstances atmosphériques peuvent être différentes.

En même temps que cette opération est nécessaire dans le tracé d'une ligne géodésique, elle fait connaître un élément essentiel de la figure de la Terre. Car la longitude, la latitude et l'altitude d'un point sont en quelque sorte ses trois coordonnées sur la surface de la terre.

On s'est ainsi assuré qu'en France, le niveau de l'Océan diffère peu de celui de la Méditerranée. C'est une confirmation de la régularité de forme que nous avons supposée à la surface des mers.

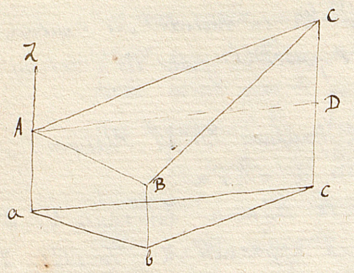
La méthode précédente suppose qu'on puisse se placer aux deux stations. Quant aux points inaccessibles, il est facile aussi d'en connaître l'altitude.

Soient A et B deux points accessibles,

C le sommet d'une montagne,

a b c leurs projections sur la surface des mers.

On connaît ab. et comme les angles A et B ont été réduits à l'horizon, les angles a et b sont aussi connus. — On pourra donc, dans le triangle abc, calculer les côtés ac, bc.



Par le point A, menons une parallèle AD à ac. Nous aurons un triangle rectangle en D dont nous connaîtrons le côté AD = ac approximativement ; et si on veut l'avoir exactement, il suffira de poser

$$AD = ac \cdot \frac{r+h}{r}$$

D'autre part, on a observé en A la distance zénithale du point C, c.a.d. l'angle ZAC. Son complément est CAD. On connaîtra donc deux éléments du triangle rectangle ACD. On en conclura donc CD, c.a.d. la hauteur du point C inaccessible au-dessus du point A accessible.

Il est vrai qu'ici on se sert d'une distance zénithale, et l'observation ne donne pas la véritable. — En outre, comme le point C est inaccessible, il est impossible de faire usage de la méthode des distances zénithales réciproques, et l'on est forcé de recourir aux Tables.

C'est ainsi qu'on a déterminé l'élévation des hautes montagnes.

La plus élevée est dans l'Asie centrale. Mais elle n'a pas été mesurée avec assez d'exactitude pour qu'on ait dans les résultats une entière confiance.

Un sommet de la partie septentrionale du Thibet a	8818^m	?
au Sud est le Dhawaladghiri	8536^m	?
Le plus haut sommet des Cordillières (Sorata, Pérou) a	7696^m	
Chimborazo	6514	
Mont-Blanc	4810	
Mont Rose, 20 lieues E. du Mt Blanc, frontière du Piémont	4619	
Mont Pelvoux (Htes Alpes)	4100	
Etna	3306	
Mont Righi (Suisse)	1795	

Cette dernière montagne est au-dessous de la limite des neiges perpétuelles. Car cette limite, variable avec la latitude, est, pour Lat. 45°, de 2500^m. — Sous l'Equateur, elle est de 4000^m.

Le plus ht. sommet du Jura a	1703^m	
" Vosges "	1460	

On voit d'après ces nombres que la plus haute altitude n'atteint pas 9000^m et est peu supérieure à 8000. Mettons 8000. Le rayon de la Terre est approximativt. de 6400 kilom. Le rapport $\frac{h}{r}$ est donc $\frac{1}{800}$.

Ainsi les plus grandes hauteurs sont une fraction excessivement petite du rayon de la Terre, et, dans les questions de Mécanique céleste où nous aurons à calculer l'attraction exercée par la Terre sur un autre astre, la Lune par exemple, nous pourrons la supposer de révolution et même sphérique dans beaucoup de cas.

Pour compléter l'étude de la surface de la Terre, il faut indiquer comment on peut fixer la position de chaque point de la surface. — Nous

avons déjà parlé des trois coordonnées dont on fait usage, altitude, Longitude, et Latitude. — Nous avons déjà vu comment on obtient l'altitude et la Latitude. Il nous reste à décrire les moyens que l'on emploie pour avoir la 3e. coordonnée.

Nous rappellerons seulement qu'on obtient la Latitude d'un lieu en prenant le complément de la distance zénithale du pôle, et que les marins prennent la hauteur du ☉ au-dessus de l'horizon à son passage au méridien, et sa distance polaire dans la connaissance des temps. —

Détermination des Longitudes.

Le moyen le plus précis pour déterminer la différence de Longitude de deux observatoires consiste dans l'emploi des chronomètres. — Dans chaque observatoire, il y a une horloge sidérale dont la marche est réglée sur la révolution diurne des étoiles. Une pareille horloge marque 24h. dans l'intervalle de deux passages successifs d'une étoile au méridien, ou bien elle s'en écarte d'une quantité constante que l'on connaît.

On a l'habitude de régler les horloges sidérales sur le passage du point équinoxial.

Cela posé:

Transport des chronomètres.

$$h' - h : 24 :: l : 360$$

$$l = 15^\circ (h' - h)$$

On emploie plusieurs chronomètres pour plus d'exactitude.

60 chronom. entre Londres et St. Pétersbourg.

Seconde Méthode, au moyen des feux.

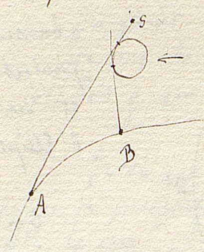
Elle n'est applicable que pour des lieux peu éloignés l'un de l'autre.

Méthode connue.

3e. Méthode plus exacte.

Satellites de Jupiter.

Occultations des étoiles par la Lune. — Correction.



(Cours de Leverrier).

Cartes Géographiques.

Plusieurs Systèmes.

1°. Projection orthographique.
2°. Perspective ou Projection Stéréographique.
3°. Développement Conique ou Cylindrique.
4°. Moyens particuliers appropriés à certains usages, par exemple, Développemt. de Flamstead, Cartes de Mercator.

Pour Représenter tout le Globe, on n'emploie que les Deux premières méthodes.

Elles étaient toutes Deux connues des Grecs. Ptolémée les a Décrites Dans Deux ouvrages qui nous sont parvenus. – Il appelle la première analemme, et la Seconde Planisphère. – Les auteurs du moyen âge ont appelé cette Dernière astrolabe.

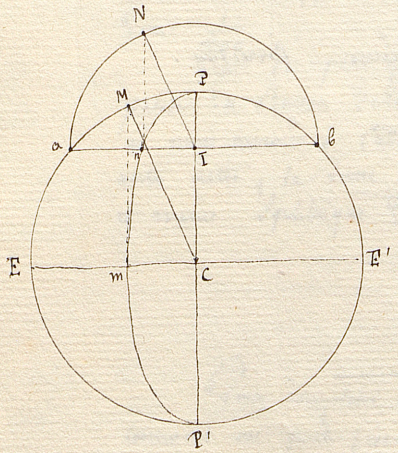
Leurs Défauts sont inverses. – or la proj. Orthographique est la projection Stéréogr. quand le pt. De vue est à l'∞. C'est ce qui a conduit Lahire à penser qu'il existait sur PO prolongé un point pour lequel les Deux Défauts seraient compensés.

Projection orthographique.

On prend ordinairement un méridien pour plan De Projection. L'Equateur et les parallèles y sont Représentés par Des lignes Droites, et les méridiens par Des Ellipses ayant pour axe commun la Ligne Des Pôles.

Théorème.

Le Demi-axe De chacune De ces Ellipses est Egal au Cosinus De la Longitude Du méridien projeté comptée à partir Du plan De projection.



Le cercle EE'PP' peut être considéré comme le Rabattemt. Du cercle Equateur autour De EE', un Rayon CM comme le Rabattemt. De la trace D'un méridien sur l'Equateur. Si Donc on abaisse Mm perp. sur EE', m sera la projection Du point D'intersection De l'Equateur et Du méridien. Donc mC est le petit axe De l'Ellipse. or

$$mc = \text{Cos}\, ECM = \text{Cos. Longitude}$$

On peut facilement construire l'Ellipse par points. on mène un parallèle ab q.q. on Décrit Dessus un cercle. on mène IN parallèle à CM, et l'on projette N en n. Le point n est un point De l'Ellipse.

On ne fait pas la projection sur l'Equateur, parce que les Régions tropicales seraient trop déformées, et ce sont celles qu'il importe de représenter exactement.

Projection Stéréographique.

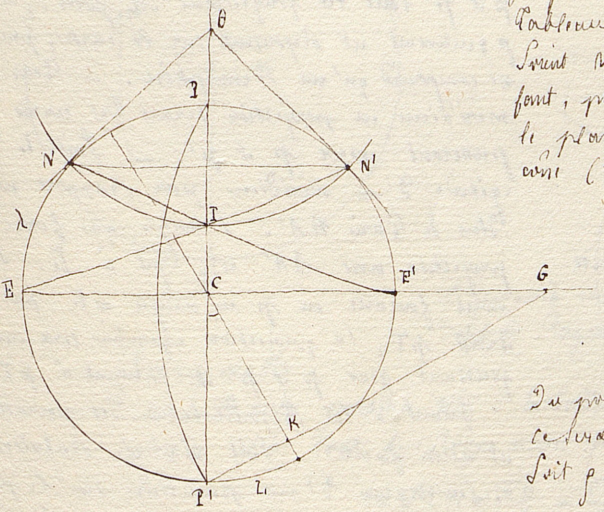
Il y en a de trois sortes :
- Projection Polaire, l'œil est au pôle ;
- Projection sur le Méridien, " sur l'Equateur ;
- Projection sur le Méridien et l'Horizon, " au Méridien.

Trois propriétés Générales.
1°. Tout cercle se projette suivant un cercle.
2°. Les projections de deux cercles se coupent sous un angle égal à celui des deux cercles.
3°. Le centre de la projection d'un cercle est la projection du sommet du cône circonscrit à la sphère suivant ce cercle.

Ces propriétés sont connues.

1°. Projection sur le Méridien.

Soit $EE'PP'$ le plan du méridien sur lequel se fait la projection.



L'œil est sur l'Equateur, en avant, et en un point qui a pour projection le point C. On fait la perspective des cercles qui sont derrière le plan du Tableau.

Soient N et N' les extrémités d'un parallèle. Il faut, pour avoir le centre du cercle projeté sur le plan du Tableau, circonscrire à NN' un cône (3e propriété) : son sommet est θ, situé dans le plan du Tableau ; le joindre au point de vue ; et chercher le point d'intersection de cette droite avec le plan du Tableau : ce qui donne encore θ. — Si donc du point θ comme centre je décris un cercle, ce sera la projection cherchée.

Soit ρ son rayon, et $r = 1 = CP$:

$$\rho = \text{Cotg.}\, \lambda.$$

Je dis que si l'on veut déterminer directement les points où le cercle qui forme la perspective du parallèle NN' rencontre PP', il faut mener $E'N$ et EN'. En effet, le Rayon qui va de l'œil au point du parallèle contenu dans le méridien perp. à $EE'PP'$ est dans ce plan méridien. Si on le rabat sur le plan de l'Equateur, l'œil vient en E', le point du parallèle en N, et le point I n'a pas changé de position.

De là cette Règle qu'on peut substituer à la construction précédente. – Joignez le point E' aux extrémités N.. des parallèles, déterminez les différents points F, faites passer des cercles par les groupes de points N I N'.

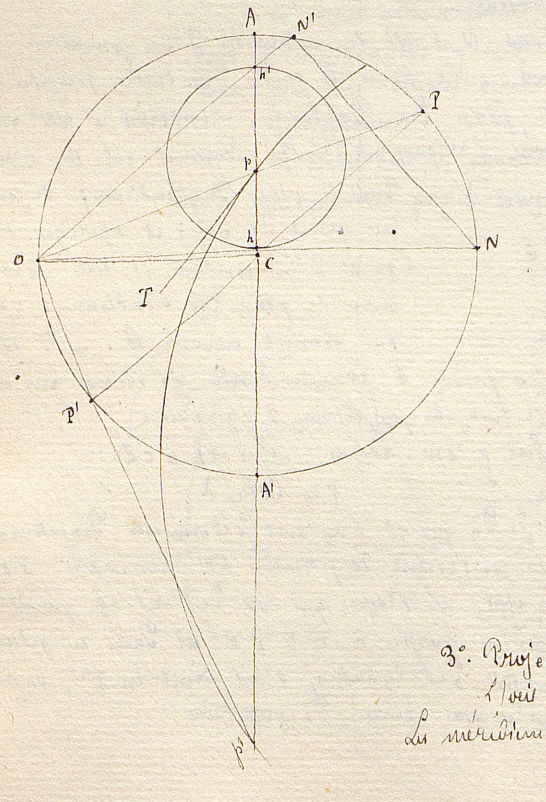
Le méridien qui est perp. au plan de projection se projette suivant PP'. on l'appelle le méridien moyen. – Soit L la longitude d'un second méridien comptée à partir du méridien moyen. – Pour déterminer le centre du cercle qui sera la projection de ce méridien, il faut toujours imaginer le cylindre circonscrit, et par l'œil mener une parallèle aux génératrices de ce cylindre. or cette parallèle est située dans le plan de l'Equateur perp. à la trace du méridien sur ce plan de l'Equateur. Si donc on abaisse P'K G perp. sur cette trace supposée rabattue, on aura en G le centre.

$$\rho = P'G = \frac{r}{\sin L} = \frac{1}{\sin L}.$$

2°. Projection sur l'Horizon.

On appelle Point Central dans une carte construite stéréographiquement la projection de l'extrémité du diamètre qui passe par l'œil. – Les points qui, sur la Terre, sont situés à la même distance de cette extrémité, se trouvent aussi en projection à égale distance du point Central. – Quand on veut que le point central soit un point donné de la Terre, on prend pour point de vue le point diamétralement opposé, et la projection se fait alors sur un plan perp. à la verticale du lieu. – Ce plan est ce qu'on appelle l'Horizon rationnel du lieu. voilà pourquoi l'on dit que la projection est faite sur l'Horizon.

Soit C le cercle perpendiculaire au diamètre qui passe par le point de vue, AA' l'intersection de ce cercle avec le méridien du point central (Paris) de même O le rabattement du point de vue. p et p' sont les projections des pôles. (Le premier p seulement est représenté sur la carte, puisqu'elle ne comprend qu'un Hémisphère. – Tous les méridiens en projection seront des cercles qui passeront par p et p'. – Soit L la longitude d'un méridien par rapport au méridien de Paris AA'. L'angle que fera sa projection avec AA' est égal à L. Si donc nous faisons en p un angle = L. par la droite pT, la projection cherchée sera un cercle passant par p et p' et tangent à pT.



Quant à la représentation des parallèles, elle est aussi facile. Soit NN' le rabattement de la trace d'un parallèle sur le plan du méridien. Joignons ON, ON', et décrivons sur hh' un cercle, nous aurons la représentation du parallèle NN'.

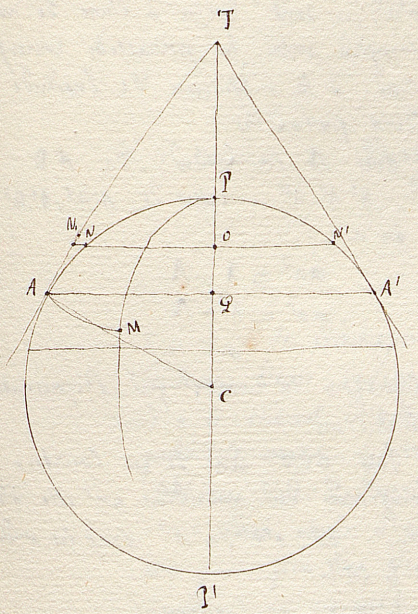
3°. Projection Polaire.

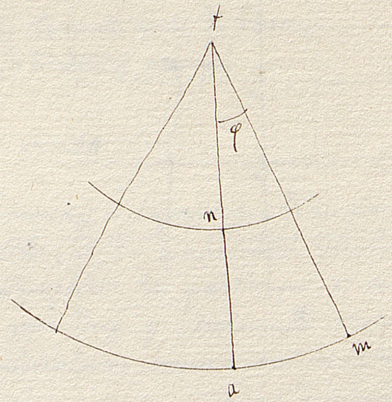
L'œil est placé au pôle, le Tableau est l'Equateur. Les méridiens sont représentés par les rayons de l'Equateur

les parallèles par des cercles concentriques. — on fait peu d'usage de cette projection, parce que les lieux voisins du pôle, les seuls qui ne seraient pas fort altérés sur la carte, sont aussi ceux qu'il n'y a pas lieu de représenter, parce qu'ils sont inhabités ou inconnus.

Développement conique.

Il s'applique à la représentation d'un Royaume, d'une province comprise entre deux parallèles et deux méridiens donnés. on imagine un cône circonscrit suivant le parallèle moyen, et l'on suppose que ce cône se confond sensiblement avec la surface de la terre dans l'étendue de la zone comprise entre les deux parallèles : — on développe ce cône sur un plan en un secteur circulaire. Les méridiens deviennent des rayons du secteur, et les parallèles, des arcs de cercle concentriques.





Le parallèle moyen se développera suivant l'arc am, dont le Rayon $ta = \text{Cot.}\,\Lambda$, Λ étant la Latitude de ce parallèle.

Un autre parallèle NN' à la Latitude λ sera dans le développement un arc de cercle dont le Rayon aura pour valeur

$$tn = TN = \frac{TO}{\text{Cos}\,\Lambda} = \frac{CT - OC}{\text{Cos}\,\Lambda} = \frac{\text{Cosec}\,\Lambda - \text{Sin}\,\lambda}{\text{Cos}\,\Lambda}$$

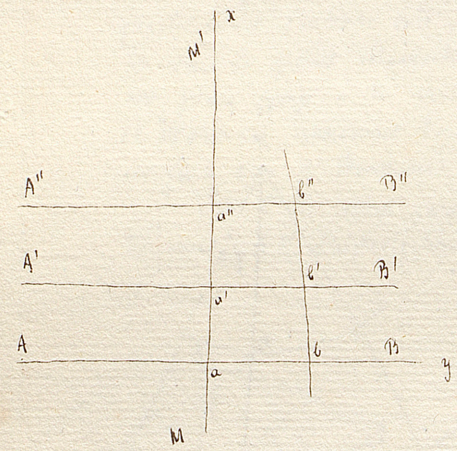
Le méridien perp. au plan sur lequel on fait le développement s'appelle le Méridien moyen. ta représente ce méridien dans le développement. Cherchons l'angle φ que le Rayon tm représentant un autre méridien dont la Longitude est L, fera avec le méridien moyen ta. — on a

arc am $= \varphi.\,ta$. et sur la sphère arc $AM = L.\,AQ = L.\,\text{Cos}\,\Lambda$. or arc AM = am. donc $\varphi.\,ta = L\,\text{Cos}\,\Lambda$, $\varphi\,\text{Cot.}\,\Lambda = L\,\text{Cos}\,\Lambda$. $\varphi = L\,\text{Sin}\,\Lambda$. — cette

valeur de φ, et l'expression du Rayon tiré, sont les Éléments qui servent à construire la Carte.

Développement de Flamsteed.

Dans ce Système, c'est la surface du Cylindre circonscrit à la Terre suivant un méridien moyen que l'on considère comme se confondant avec une portion de la surface de la Terre et que l'on développe sur un plan. — Le méridien moyen devient une ligne droite, et les parallèles, des droites perpendiculaires respectivement égales à ces arcs. Les méridiens voisins de part et d'autre du méridien moyen deviennent des lignes courbes qui sont le développement des Ellipses suivant lesquelles les plans des méridiens coupent le Cylindre.



Soit MM' le méridien moyen développé, AB, A'B', A''B'' les parallèles ; aa', a'a'',.. sont égales à l'arc de méridien compris entre les parallèles correspondants, c.à.d. à la différence de Latitude des deux parallèles.

Soit Λ la Latitude de AB.

$\lambda' \lambda'' \lambda'''$ .. celles de A'B', A''B'', A'''B''',..

on a

$$aa' = \lambda - \Lambda$$
$$aa'' = \lambda' - \Lambda$$
etc.

Cherchons la courbe qui représente les méridiens.

Soit bb'b'' une de ces Courbes, L la Longitude du méridien qu'elle représente compté à partir du méridien moyen. — ab, a'b', a''b'' sont les ordonnées

$$ab = L.\cos L.$$
$$a'b' = L.\cos \lambda$$
$$a''b'' = L.\cos \lambda'$$
etc.

Telles sont les Équations qui déterminent la position d'un point dont la Longitude et la Latitude sont connues.

Cherchons l'Équation de ce méridien. — Prenons AB et MM' pour axes

$$x = aa' \quad , \quad a'b' = y$$
$$x = \lambda - \Lambda \quad , \quad y = L.\cos \lambda$$

Éliminant λ

$$y = L.\cos(x + \Lambda)$$

telle est l'équation cherchée.

au point où bb'b'' rencontre le Méridien moyen MM', on a $y = 0$,

par suite $\cos(x+\Lambda) = 0$ et $x = 90° - \Lambda$. — Tous les méridiens de la carte concourent en ce point, qui représente le pôle.

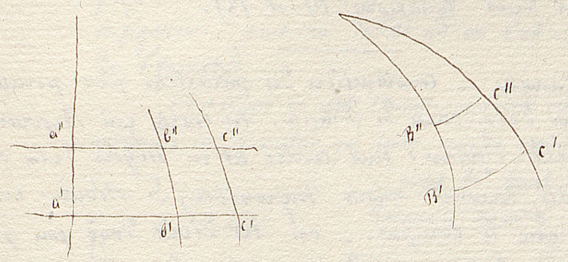
Si l'on suppose que le premier parallèle AB soit l'Equateur, $\Lambda = 0$, et l'équation devient

$$y = L \cos x.$$

Théorème.

Dans le développement de Flamsteed, les aires ne sont pas altérées.

En effet, considérons un petit Rectangle sphérique $B'C'B''C''$ compris entre deux parallèles infiniment voisins et deux méridiens aussi infiniment voisins.



Son aire sera

$$B'C' \times B'B''.$$

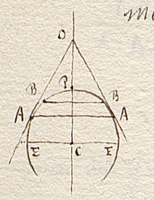
À ce petit Rectangle correspond $b''c''b'c'$, dont l'aire est $b'c' \times a'a''$. — or $B'C' = b'c'$, $B''C'' = b''c''$, donc ...

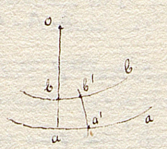
c.q.f.d.

Système de la Nouvelle Carte de France.
Développemt. de Flamsteed modifié.

Si le développement de Flamsteed a l'avantage de ne pas altérer les distances dans le sens des parallèles, et de conserver la grandeur des aires, il a le défaut d'altérer la configuration des parties qui s'éloignent du parallèle moyen, parce que les méridiens y deviennent obliques aux parallèles au lieu de leur être perpendiculaires comme sur la sphère.

Pour obvier à cet inconvénient, on a eu l'idée de figurer les parallèles non plus par des droites, mais par des cercles concentriques. — Le cercle correspondant au parallèle moyen se détermine comme dans le développement conique, et les autres, par la condition que leurs distances respectives soient les mêmes que sur la sphère. — Le méridien moyen est représenté par une ligne droite, et chacun des autres par une courbe construite de façon que les arcs interceptés sur les parallèles entre deux méridiens restent de même longueur sur la carte.





D'après cela, soit AA le parallèle moyen. On décrira sur la carte un cercle aa de rayon $oa = OA = \cot. \Lambda = R$. — La droite oa représente le méridien moyen EAP.

Le parallèle BB à la latitude λ, sera représenté par un cercle bb ayant le point o pour centre, et un rayon $r = ob = oa - AB$; ou

$$(1) \quad r = \cot. \Lambda - (\lambda - \Lambda) = R - (\lambda - \Lambda).$$

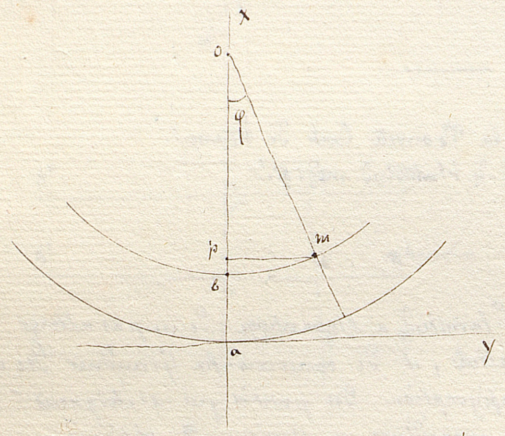
Pour construire un méridien, on prendra sur les cercles aa, bb, des segments aa', bb', égaux respectivement aux arcs compris sur les parallèles entre le méridien moyen, et celui qu'on veut représenter. — Soit l la longitude de celui-ci par rapport au méridien moyen. L'arc du parallèle BB compris entre ces deux méridiens sera égal à l cos λ. Donc

$$(2) \quad \text{arc } bb' = l.\cos\lambda.$$

ainsi, un point b' de la carte sera déterminé par le rayon r du cercle sur lequel il se trouve, et par la longueur de l'arc bb' compté sur le cercle à partir de la droite oa. — Les expressions de ces deux coordonnées sont fournies par les deux équations (1) et (2).

Coordonnées Rectangles. — Construction des parallèles par points. —

Dans le système de la carte de France, les cercles qui représentent les parallèles ont de très grands rayons: leur centre est en dehors de la carte, et il serait toujours difficile, souvent même impossible, de décrire ces cercles d'un mouvement continu avec le compas. — on les décrit donc par points. — Pour cela, on les rapporte à deux axes rectangulaires dont l'un est le méridien moyen, et l'autre la tangente au parallèle moyen.



Pour le point m on a

$$r = R - (\lambda - \Lambda)$$

$$\text{arc } mb = l.\cos\lambda$$

appelons φ l'angle au centre sous-tendu par bm.

$$\varphi = \frac{\text{arc. } bm}{r}$$

$$\varphi = \frac{l.\cos\lambda}{r}$$

$$mp = r\sin\varphi \qquad op = r\cos\varphi$$

d'où

$$x = R - r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi.$$

Telles sont les coordonnées rectangles d'un point m de la carte. r et φ qui y entrent dépendent directement de la latitude et de la longitude du point correspondant sur la sphère.

Les valeurs d'x et d'y exprimées directement en fonction de λ et l sont

$$x = R - (R + \Lambda - \lambda)\cos\frac{l\cos\lambda}{R+\Lambda-\lambda}$$

$$y = (R + \Lambda - \lambda)\sin\frac{l.\cos\lambda}{R+\Lambda-l}$$

Si l'on veut l'éq. d'un parallèle, on éliminera l, et l'on aura

$$\left(\frac{x - R}{R+\Lambda-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y}{R+\Lambda-\lambda}\right)^2 = 1$$

équation d'un cercle. —

Pour obtenir l'équation d'un méridien, il faudrait éliminer λ entre les expressions de x et de y.

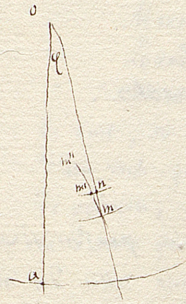
Les méridiens coupent tous l'axe oa en un même point qui correspond au pôle, et pour lequel on a par conséquent $\lambda = 90°$. — La distance de ce point au centre o des cercles est égale à

$$R + \Lambda_1 - 90°$$

Calcul de l'inclinaison d'un méridien sur un parallèle.

Les courbes qui représentent les méridiens ne coupent pas précisément à angle droit les parallèles, comme cela a lieu sur la sphère : mais elles s'écartent très peu de la perpendicularité, en sorte que la portion de sphère représentée sur la carte est très peu défigurée. C'est là le but qu'on s'est proposé en modifiant le développement de Flamsteed.

Cherchons en effet l'angle qu'un méridien $mm'm''$ fait au point m avec la normale au parallèle qui passe par ce point.



Le point m' étant infiniment voisin de m, on a, dans le triangle $mm'n$, rectangle en n

$$\text{Tg.}\, m'mn = \frac{nm'}{nm}$$

Soit $on = r$, $noa = \varphi$: alors $nm' = r\,d\varphi$ $nm = dr$

$$\text{Tg}\, \mu = \frac{r\,d\varphi}{dr}$$

Les équations précédentes qui donnent r et φ, et dans lesquelles il faut regarder l comme constant, donnent

$$dr = d\lambda$$

$$r\,d\varphi + \varphi\,dr = -\,l \sin\lambda\, d\lambda$$

d'où

$$\frac{r\,d\varphi}{dr} = l\sin\lambda - \varphi$$

$$\text{Tg}\,\mu = l\sin\lambda - \varphi = l\sin\lambda - \frac{l\cos\lambda}{r}$$

Cette expression donne pour μ une valeur très petite, surtout dans la carte de France, où l est compris entre 0 et 5°, et $\Lambda = 45°$.

Par exemple, pour $\lambda = 50°$, on trouve $\mu = 20'$

Aux points situés sur le parallèle moyen, on a $r = \text{Cot.}\,\lambda$; d'où $\text{Tg}\,\mu = 0$. De sorte que les méridiens sont rigoureusement perp. au parallèle moyen. — Et puisque dans tous les cas ils s'écartent peu de la perpendicularité, il en résulte que les figures ne sont pas sensiblement déformées.

Égalité des surfaces.

Ainsi que dans le système de Flamsteed, les aires restent les mêmes. La démonstration est identique.

Ainsi ce développement jouit des mêmes propriétés que celui de Flamsteed, et en outre il a l'avantage de ne déformer que très peu les figures. — Il devient précisément le système de Flamsteed quand le parallèle moyen est l'équateur. Car alors le centre commun des parallèles projetés est à l'infini.

application au cas où la Terre est supposée un Sphéroïde.

Pour plus d'exactitude, on tient compte dans la carte de France de l'aplatissement de la Terre. — Le mode de développement s'y prête sans difficulté. Il suffit de ne plus considérer le méridien moyen comme un cercle dont les arcs sont proportionnels aux latitudes, mais bien comme une ellipse dont les arcs sont fonction des latitudes. — on se sert alors, pour déterminer les distances des parallèles comptées sur le méridien, de la formule

$$S = a\left(1-\frac{e^2}{4}\right)(\lambda'-\lambda) - \frac{3}{4}ae^2 \sin(\lambda'-\lambda)\cos(\lambda'+\lambda)$$

Le Rayon du parallèle moyen que nous avons pris égal à Cot. Λ en supposant le Rayon de la Sphère = 1, subit aussi une légère modification. Il devient

$$OA = N \text{ Cot. } \Lambda$$

N est la longueur de la Normale.

Cartes marines.
Développement de Mercator.

Dans ce système, les méridiens sont représentés par des droites parallèles dont les distances respectives sont les mêmes que celles des méridiens comptées sur l'Equateur. — L'Equateur et les parallèles sont aussi représentés par des droites, perp. sur les premières. Les distances de ces droites à l'Equateur ne sont pas proportionnelles aux latitudes des parallèles qu'elles représentent : elles croissent très rapidement suivant une loi compliquée.

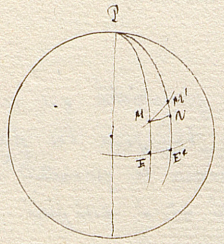
Cette loi a pour objet de remplir cette condition :

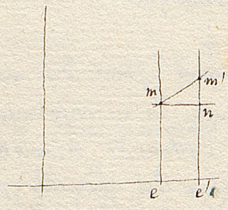
Deux lignes quelconques tracées sur la carte doivent se couper sous le même angle que les deux courbes sphériques qu'elles représentent.

C'est, comme on le voit, une des propriétés de la projection Stéréographique, mais qui n'était que secondaire, et en quelque sorte fortuite dans ce genre de projection, tandis qu'ici elle forme le caractère principal de la carte, et est le fondement de l'usage qu'en font les marins.

Deux courbes feront le même angle sur la Sphère et sur la carte si nous exprimons qu'une courbe quelconque fait avec les méridiens qu'elle traverse les mêmes angles sur la Sphère et sur la Carte.

Soit donc une courbe MM'... tracée sur la Sphère, et mm'... la courbe qui la représente sur la Carte.





MM' et mm' sont deux éléments infiniment petits de ces courbes. Le premier est compris entre deux méridiens EM, E'M' qui font entre eux un angle dl (l étant la Longitude de EM.), et le 2e est compris entre les deux droites parallèles

em, é m' qui représentant ces méridiens. — La distance de ces droites est proportionnelle à l'angle dl. ainsi

$$ee' = a.dl$$

Il suffit d'exprimer que les triangles MM'N et mm'n sont semblables ;

$$Tg\,M = Tg\,m'$$

$$\frac{d\lambda}{dl.\cos\lambda} = \frac{ds}{a.dl}$$

$$ds = a\,d\lambda\,\sec\lambda$$

Jusqu'ici, nous pouvons considérer les quantités dl, ds et $d\lambda$ comme étant simplement très petites, sans être mathématiquement infiniment petites. alors, ce résultat nous apprend que, tandis que l'accroissement de longitude est le même sur la carte que sur la sphère, l'accroissement de la longitude très petit d'une latitude est proportionnel à la sécante de cette latitude.

On peut intégrer (voir le cours de Baye, p.

Mercator (1569).

Loxodromie: λοξος oblique, δρομος course.

Rhumb. Dont venir de ῥομβος, rotula, petite rose, parce que les Rhumbs de vent, ou directions du vent sont marqués au nombre de 32 pour les rayons d'un cercle qui représente l'horizon. — On le dérive encore de ῥυμος, timon de navire, qui la fait aller droit, comme le Rhumb de vent montre aussi la route qu'il faut tenir.

Notice historique sur les Cartes marines.

avant que l'on connût les Cartes de Mercator, les marins se servaient des Cartes plates, dans lesquelles les méridiens et les parallèles étaient représentés par des lignes droites rectangulaires : les méridiens y conservaient leurs distances réelles, ainsi que les parallèles. C'est comme si l'on avait étendu la surface de la sphère sur un plan, en conservant à l'équateur et aux méridiens leurs longueurs, mais en allongeant celle des parallèles. On se servait de ces cartes pour déterminer le Rhumb de vent qu'on devait suivre. On commettait une erreur. Mais on la rendait peu sensible, en ne parcourant qu'une faible distance, et en renouvelant le Rhumb. L'expérience des pilotes avait pu apprendre à tenir compte approximativement de l'erreur.

C'est le célèbre géographe des Pays-Bas, Gérard Mercator (1512-1594) qui le premier imagina de faire croître sur les cartes les degrés de latitude. Il publia en 1569 sa première carte hydrographique construite dans ce système, mais sans en faire connaître le principe.

Près de 30 ans après, ces principes furent découverts par le Géomètre Edward Wright (1560-1620), qui les donna dans un livre intitulé

Détermination et correction de certaines erreurs qui se commettent dans la navigation,

en anglais - 1599. -

Wright montra bien que, pour qu'une Loxodromie devienne une

ligne droite sur une carte plate, il faut, puisqu'on y augmente comme nous l'avons dit, les degrés des parallèles, augmenter dans le même rapport les degrés du méridien. Or, à la latitude λ, l'arc de parallèle compris entre les deux méridiens qui font l'angle L est égal à $L \cos\lambda$, ou $\frac{L}{\mathrm{Sec}\,\lambda}$. Sur la carte, on fait cet arc égal à L. On l'augmente donc dans le rapport de 1 à $\mathrm{Sec.}\,\lambda$. C'est donc dans ce rapport qu'il faut accroître les degrés du méridien, c.à.d. les distances des parallèles. Si donc on marque sur le méridien, à partir d'un point dont la latitude est λ, des segments égaux NN', $N'N''$, ... dont l'accroissement de latitude soit δ, il leur correspondra sur la carte des segments proportionnels à $\mathrm{Sec.}\,\lambda$, $\mathrm{Sec.}(\lambda+\delta)$, $\mathrm{Sec.}(\lambda+2\delta)$ .. et un arc de méridien sera représenté sur la carte par la somme de ces sécantes. – Ce procédé de construction est d'autant plus exact que l'accroissement δ est plus petit. Wright fit $\delta = 10'$, ce qui présentait une exactitude suffisante.

On en était là quand un navigateur anglais, Henry Bound, trouva en 1650, que la somme des sécantes d'arcs croissant d'une petite quantité constante depuis l'équateur jusqu'à une certaine latitude, suivait la même loi que le Log. de la tangente du demi-angle de la latitude. – Ce fut par des vérifications numériques que Bound fit cette découverte curieuse dont il ne pouvait donner la démonstration.

Mais cette démonstration fut donnée par Gregori dans ses Exercitationes Mathematicae (1668) et par Barrow dans ses Lectiones Geometricae.

Le Géomètre Mercator l'avait annoncée le 1er en 1660 en la proposant comme une sorte de défi aux Géomètres. Mais il ne l'a pas publiée. – On conçoit de suite que, puisqu'il était en possession de sa célèbre série pour la construction des Logarithmes, il ait trouvé aisément cette démonstration.

Depuis l'invention du calcul différentiel, toute difficulté a disparu, puisqu'il suffit d'intégrer l'expression

$$\frac{d\lambda}{\cos\lambda}$$

Carte de Cassini.

Cassini de Thury qui conçut en 1783 l'idée de la Grande carte de France, se servit pour déterminer la position de chaque point à la surface de la terre, de deux coordonnées autres que la longitude et la latitude. – Après avoir fait choix d'un méridien principal sur lequel on prend un point pour origine, on détermine chaque point de la terre par l'arc de grand cercle abaissé de ce point perpendiculairement sur ce méridien, et par l'arc compris entre le pied de ce dernier et le point origine. La première de ces coordonnées s'appelle la perpendiculaire ou la distance à la méridienne, et la seconde

la seconde, la distance à la perpendiculaire.

Dans ce système, les points qui ont la même distance à la perp. sont sur un grand cercle perp. à la méridienne, et ceux qui ont même distance à la méridienne sont sur un petit cercle parallèle au méridien principal.

Pour former la carte, on peut supposer qu'un cylindre ait été circonscrit à la Terre suivant le méridien principal, et qu'il se confond avec la surface de la Terre de part et d'autre de ce méridien suivant une assez grande étendue pour que les petits cercles perp. ou ou parallèles au méridien puissent être considérés comme étant situés sur le cylindre lui-même. — Quant aux grands cercles perp. au méridien, ils se confondent avec les arêtes du cylindre. — On développe ce cylindre sur un plan. Les grands cercles dont il s'agit et les petits cercles parallèles au méridien principal forment dans le développement deux séries de droites rectangulaires. — Les coordonnées sphériques qui deviennent des lignes droites conservent leur propre grandeur sur la carte.

Notice historique
sur la
Mesure de la Terre.

La figure de la Terre donne lieu à deux questions distinctes, savoir, de déterminer la forme, et de déterminer sa grandeur.

Dès la plus haute antiquité, on s'est occupé de la seconde question: mais la 1ère n'a été soulevée que vers la fin du 17e siècle par Huyghens et Newton. Jusque là, on avait regardé la Terre comme sphérique, et ce furent ces deux grands Géomètres qui eurent les premiers une idée contraire en pensant que notre Globe devait être un Ellipsoïde de révolution.

Voici l'indication succincte des documents anciens qui nous restent sur la Grandeur de la Terre, et les moyens employés pour la déterminer.

Aristote dit, dans son Traité du Ciel, L. II, que ceux qui s'efforcent de conjecturer la Grandeur de la Terre, ne lui donnent guère que 400000 stades de circonférence. — Nous ne connaissons pas la longueur du stade. — Ce passage prouve donc seulement qu'au temps d'Aristote, on avait déjà mesuré plus ou moins bien la Grandeur de la Terre.

276 ans avt. J.C. Eratosthène a mesuré un arc de méridien. Son procédé est connu. Il repose sur la détermination de la différence des latitudes de deux points du méridien, par l'observation de la hauteur du ☉ au-dessus de l'horizon, en ces lieux, en un même jour.

Eratosthène savait qu'à Syène, un certain jour de l'année, (le jour du Solstice), à Midi, les puits étaient éclairés jusqu'au fond, et qu'un style vertical ne produisait pas d'ombre. — Cela indiquait que le Soleil était en ce moment au zénith de Syène. — Mais, au même moment, à Alexandrie, Eratosthène voyait le ☉ à une distance zénithale de 7° 12'. Il en conclut, en supposant le ☉ infinimt. éloigné, que l'arc AB est 7° 12', ou

$$\frac{360^\circ}{50}$$

et la distance de Syène à Alexandrie était estimée 5000 stades. Eratosthènes supposa que ces 5000 stades étaient comptés dans la direction même du méridien, quoi qu'il y eût près de 3° de longitude entre les deux lieux, et il en conclut que le degré était de 694 stades ou 700 stades, et la circonf. de la Terre 252000 stades. — C'est la mesure que beaucoup d'auteurs anciens et du moyen-âge ont adoptée depuis Eratosthènes.

106 ans avt. J.C. l'astronome Posidonius, le maître de Cicéron, suivit une autre méthode pour déterminer la diff. des latitudes de deux lieux supposés dans le même méridien. Ce fut par l'observation des hauteurs d'une même Etoile. Les deux lieux étaient Rhodes et Alexandrie, leur distance était estimée 5000 stades, comme

celle de Syène à Alexandrie. — Canopus, belle étoile du ciel austral, ne paraît à Rhodes qu'à l'horizon, sans s'élever au-dessus. A Alexandrie, elle s'élevait de 7° 30' au-dessus de l'horizon, à son passage au méridien. — Posidonius en conclut que l'arc AB qui sépare Rhodes d'Alexandrie était lui-même de 7° 30' ou $\frac{360°}{48}$, et de l'équation

$$\frac{360}{48} = 5000 \text{ stades}$$

il tira

$$1° = 666 \text{ stades}.$$

ainsi son degré était plus court que celui d'Eratosthènes, si toutefois son stade avait la même longueur, ce que nous ignorons.

125 ans av. J. C. — Ptolémée dit qu'il n'est pas besoin de prendre l'arc AB dans le même méridien, mais qu'il suffit de savoir de quel angle il est incliné au méridien, et de connaître la latitude de ses deux extrémités. — Il dit avoir fait cette opération, mais sans en donner le détail. — Il dit seulement que, suivant les meilleures mesures, le degré est de 500 stades.

Voilà ce qui nous reste sur la mesure de la Terre chez les Grecs. Les Arabes s'en sont aussi occupés.

Au IXe siècle, le calife Almamoun, qui encourageait les sciences avec beaucoup d'ardeur, fit mesurer un arc de méridien dans les plaines de Singiar. — Ses mathématiciens marchaient les uns vers le S. les autres vers le N. en mesurant la distance parcourue, et en calculant la différence de latitude par la hauteur du soleil. — Ils trouvèrent le même résultat que Ptolémée. — C'est principalement à trois frères, Mohammed, Ahmed, Hasen, fils de Musa ben Shaker, qu'on attribue cette mesure du degré terrestre. L'unité de mesure ne nous est pas connue, en sorte que nous ne pouvons pas juger du degré de précision qu'ils obtinrent.

(Ces trois mathématiciens ne doivent pas être confondus avec Mohammed ben Musa al-Khouaresmi, géomètre qui leur fut un peu antérieur, et qui a joui d'une célébrité encore plus grande comme auteur d'un traité d'algèbre imité des Hindous, et composé à la demande du même calife Almamoun. Cet ouvrage, très-renommé chez les Arabes, a été traduit au XIIe siècle (1183) et a contribué puissamment à répandre chez les Européens la connaissance de l'algèbre, appelée alors al-ghebra et al-muchabala (restauration et comparaison), à tel point qu'on regardait Mohammed ben Musa comme inventeur de cette science. Cette fausse notion historique était encore répandue à la Renaissance, ainsi qu'on le voit dans les ouvrages de Cardan, de Tartalea et d'autres. Mais depuis, on a su que les Arabes, loin d'être les inventeurs de l'algèbre, avaient reçu cette science tout-à-la-fois des Grecs et des Hindous.)

Jusqu'à la Renaissance, on ne trouve pas d'autres tentatives sur la mesure de la Terre.

En 1550, Fernel, médecin et astronome, mesura l'arc du méridien compris entre Paris et Amiens, et trouva pour le degré 57070 toises. Son procédé de mesure consiste tout simplement à compter

les tours de roue de sa voiture depuis p. Paris jusqu'au point où, par l'observation du ☉, il jugea qu'il s'était avancé de 1°. vers le Nord. — Son résultat est d'une exactitude remarquable.)

(Ce moyen, aussi commode qu'expéditif, pour mesurer de grandes distances, était employé par les anciens. on le trouve décrit dans l'architecture de Vitruve, sous ce titre: Par quel moyen on peut savoir, en allant en char ou en bateau, combien l'on fait de chemin: — L. X, Ch. XIV. — Vitruve dit que c'est une des choses les plus ingénieuses qui aient été transmises par les anciens. Le procédé avait une certaine analogie avec les rouages de nos montres. au moyen de roues dentées, on faisait qu'une roue avait une vitesse de rotation en rapport avec celle des roues de la voiture, et beaucoup moindre; celles-ci faisaient 400 tours pendt. que l'autre n'en faisait qu'un. Cette roue portait à sa circonf. une ouverture qui, à chaque tour, venait coïncider avec l'ouverture d'un vase dans lequel étaient de petites boules, de sorte qu'à chaque tour de la roue, une petite boule passait par cette ouverture, et tombait dans un vase inférieur, ce qui faisait connaître le chemin parcouru. — Lq. modifications dans ce mécanisme le rendaient propre à indiquer le chemin parcouru en bateau.).

En 1616, Snellius, célèbre géomètre hollandais, employa le premier les mesures trigonométriques combinées avec les observations astronomiques et il trouva le degré de 55021^T, résultat beaucoup trop petit.

Lq. temps après, Norwood en angleterre, par un mélange des procédés de Fernel et de Snellius, et en évaluant les détours de la route au graphomètre, trouva 57424^T, mesure trop forte.

En 1669, Picard, par le même procédé trigonométrique, détermina avec une précision jusqu'alors inconnue une distance, celle d'amiens à Malvoisine (?) d'où il conclut 57060^T: résultat très-exact, mais obtenu par la compensation de deux erreurs. d'une part, sa toise était trop courte de 1/1000, et d'autre part, dans le calcul des latitudes par l'observation des étoiles, il n'avait pas tenu compte de l'aberration et de la nutation, qui n'étaient pas connues alors. Ce fut dans ces opérations que Picard et Auzout, son collaborateur, substituèrent la lunette astronomique aux alidades du quart de cercle pour la mesure des angles. — Ils eurent soin aussi de calculer les réductions au centre des signaux, et ils prirent les distances zénithales avec un grand secteur construit tout exprès. — Ces opérations, qui reposaient sur tant de procédés nouveaux, firent beaucoup d'honneur à Picard qui les dirigeait. Elles sont le fondement des procédés actuels et l'on n'a eu qu'à imiter et à perfectionner.

En 1683, Dominique Cassini continua le travail de Picard, dans le but de mesurer tout l'arc de méridien qui traverse la France, arc de plus de 8°.

En 1690, il s'adjoignit Jacques Cassini, son fils, et Philippe Maraldi, son neveu, et reprit le travail au point où il l'avait laissé en 1683; il le poussa jusqu'aux frontières de France, et trouva le degré égal à 57097^T à la latitude de 45°.

En 1718, Jacques Cassini, Dominique Maraldi, neveu de Philippe et de la Hire le fils, continuèrent dans le N., d'amiens à Dunkerque, la mesure commencée par Picard, et trouvèrent dans cette partie

le degré = 56960 T, lat. de 50°. — on eut ainsi en France la mesure de 8° ½ du méridien.

De ces deux résultats, on conclut que le degré allait en diminuant de l'équateur au pôle. — D'où il résultait, par un raisonnement exact, que la Terre était allongée aux pôles.

Cependant comme, à la fin du 17e siècle, Newton et Huyghens avaient émis l'opinion que la Terre devait être un ellipsoïde aplati aux pôles: leurs considérations théoriques semblaient donc démenties par les faits. Aussi cette question de la figure de la Terre eut un nouvel intérêt scientifique, et piqua vivement la curiosité du public, d'autant plus que des expériences sur la durée des oscillations du pendule faites dans le même temps à Cayenne par Richer, semblaient indiquer un renflement à l'équateur, et militer en faveur de l'opinion de Huyghens et Newton.

Pour la résoudre, on proposa de mesurer deux degrés assez éloignés pour que les erreurs des observations fussent nécessairement moindres que la différence qu'on cherchait.

Plusieurs académiciens entreprirent ces opérations délicates et pénibles. Bouguer et Lacondamine partirent pour le Pérou, et Maupertuis, Clairault, Camus, Lemonnier et Outhier allèrent en Laponie.

au Pérou, on trouva	56750 T
en Laponie	57419 T
à Paris, suivant Picard,	57060

Le degré allait donc en croissant depuis l'équateur jusqu'au pôle, ce qui résolvait la question en faveur de la théorie d'Huyghens et de Newton, c.à.d. en faveur de l'aplatissement aux pôles.

Vers le même temps (1739), Cassini de Thury et Lacaille recommencèrent les mesures exécutées en France. Ce grand travail, dû principalement à Lacaille, qui l'exécuta en moins de 2 ans, eut pour résultat de confirmer à peu près la mesure de Picard, de découvrir les erreurs de Dominique et de Jacques Cassini, et de donner une mesure exacte du méridien, qui concourait, avec les mesures exécutées au Pérou et en Laponie, à prouver l'aplatissement aux pôles.

Ainsi les astronomes français, qui au 16e siècle, avaient pris l'initiative de cette question importante qui bientôt excita une émulation générale, ont eu la satisfaction de la résoudre, et d'introduire dans la mécanique des corps célestes un élément indispensable.

C'est alors que Cassini de Thury eut l'idée de sa grande carte de France. Il couvrit la surface du territoire d'un vaste réseau de triangles, par lesquels il détermina la position des points principaux rapportés sur la carte.

Pendant ce temps, Lacaille alla au Cap de Bonne Espérance, dans l'hémisphère austral, mesurer un arc de méridien, qui lui donna 57040 T par 37° 18' de latitude.

Le succès des vastes opérations de Cassini de Thury lui donna l'idée de les étendre dans toute l'Europe. Il prolongea en Allemagne jusqu'à Vienne la perp. au méridien de Paris. — Divers savants ne tardèrent pas à entreprendre de pareilles mesures pour leurs pays.

Il était surtout intéressant de continuer vers le N. c. à d. en Angleterre, les opérations du méridien de France. C'est ce qu'on fit. On convint de former, depuis Londres jusqu'à Douvres, une chaîne de triangles qui iraient se joindre à ceux de la Méridienne de Paris, et feraient connaître la position respective des deux célèbres observatoires de Paris et de Greenwich.

En 1784, on procéda à la mesure d'une première base dans les plaines de Hounslowheat, au S. O. de Londres, et, en 1787, on commença à former la chaîne des triangles. Les Commissaires Anglais et Français se réunirent le 23 Septembre à Douvres. — Les résultats de cette coopération confirmèrent la grandeur du degré du méridien calculé au N. de Paris par Lacaille et Cassini de Thury.

Enfin, quand le Gouvernement Français voulut déterminer une unité fondamentale déduite des dimensions de la Terre, il fit procéder à une nouvelle mesure du méridien. Cette grande opération a été exécutée en France par Delambre et Méchain, et en Espagne par Biot et Arago. — Elle a servi à fixer la base de notre système métrique.

Mouvement Réel de la Terre autour de la Ligne des Pôles.

Jusqu'ici, nous avons décrit les mouvements du ciel sans nous occuper s'ils étaient apparents ou réels. – Mais il est clair que les apparences resteraient les mêmes en supposant les astres immobiles et la Terre tournant sur son axe dans le même temps.

De ces deux hypothèses, fixité de la Terre ou fixité des astres, examinons laquelle est la plus probable.

Nous avons vu que les étoiles sont à des distances de la Terre tellement grandes que les dimensions de notre globe sont insensibles par rapport à ces distances. En outre, il est certain que les distances de la Terre aux étoiles sont très différentes. – Il est donc peu vraisemblable que des corps situés à d'aussi grandes distances, et de plus, à des distances aussi inégales, soient emportés d'un mouvement dont la vitesse angulaire est la même pour tous. – Au contraire, si l'on admet le mouvement de rotation de la Terre autour de son axe, les corps placés hors d'elle ne participant pas à son mouvement, les astres semblent prendre un mouvement dont la vitesse angulaire est la même pour tous, et l'explication est toute simple.

La forme aplatie de la Terre s'accorde avec cette hypothèse d'un mouvement de rotation autour de l'axe. – D'abord, si l'on admet qu'elle ait été fluide à des époques très éloignées, ce que beaucoup de faits semblent attester, la rotation autour de l'axe a dû produire l'aplatissement.

Viennent ensuite des considérations fondées sur les variations de l'intensité de la pesanteur, et qui tendent à prouver l'existence du mouvement de rotation.

Voici les faits observés. – En déterminant en un grand nombre de points de la Terre l'intensité de la pesanteur, on a trouvé qu'elle variait proportionnellement au carré du sinus de la latitude, et que, g étant l'intensité à l'équateur, on pouvait représenter les diverses valeurs de g_λ par la formule

$$g_\lambda = g\left(1 + \frac{1}{294}\sin^2\lambda\right)$$

de sorte qu'au pôle

$$g_p = g\left(1 + \frac{1}{294}\right)$$

Ces faits peuvent-ils s'expliquer en ayant recours à l'aplatissement de la Terre et en la supposant en repos ? – Si l'on admet que la Terre soit formée de couches homogènes elliptiques, on trouve par le calcul que l'intensité de la pesanteur au pôle devrait surpasser l'intensité de la pesanteur à l'équateur de $\frac{1}{590}$ de cette dernière intensité, et l'on n'arrive pas à la fraction $\frac{1}{294}$ qui est donnée par l'expérience.

Au contraire, si l'on a recours au mouvement de rotation de la Terre autour de son axe, tout s'explique. — En effet, lorsqu'un point matériel sollicité par un centre fixe, est assujetti à décrire un cercle, la pression exercée par le point sur la courbe est la résultante de la force centrifuge et de la composante normale de l'attraction. — Il est facile de voir que cette force centrifuge donne à la pression une différence direction différente de celle de l'attraction, et de plus, la diminue. Or c'est à l'Equateur que la force centrifuge est la plus grande, en outre, elle y est directement opposée à l'attraction, donc la pression y est minimum. — On trouve par le calcul que la pression est diminuée à l'Equateur de $\frac{1}{289}$ de sa valeur à cause de la force centrifuge. — Mais déjà, d'après l'effet de l'aplatissement de la Terre, elle est diminuée de $\frac{1}{590}$. Donc en tout, pour ces deux causes, l'intensité de la pesanteur est diminuée de

$$\frac{1}{289} + \frac{1}{590} = \frac{1}{194}.$$

On peut donner encore d'autres preuves du mouvement de la Terre. Parmi les courants qui règnent dans l'atmosphère, et qui portent le nom de vents, les plus remarquables sont les vents alizés qui règnent dans les régions équatoriales, et semblent souffler de l'E. à l'O. — On peut les expliquer facilement en admettant le mouvement de rotation de la Terre autour de son axe.

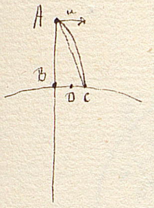
Les couches atmosphériques en contact avec l'Equateur s'échauffent et s'élèvent dans les parties supérieures de l'atmosphère, les couches des zones tempérées viennent les remplacer. Elles sont plus froides, et arrivent avec des vitesses égales à la rotation diurne de la Terre, vitesse moindre que celle des couches équatoriales. — De là résulte que les corps qui sont dans les régions tropicales ont une vitesse relative par rapport à ces couches d'air, et il se produit absolument le même phénomène que s'il soufflait effectivement un vent de l'E. à l'O. en sens contraire du mouvement diurne. — Mais ces vents arrivent perpendiculairement à l'Equateur pour remplacer les couches d'air qui se sont élevées: ils ont en outre une vitesse de l'O. à l'E. La résultante est dirigée du N.O. au S.E. par conséquent la réaction produite par les corps placés au N. de l'Equateur, dont la vitesse est plus grande, sera dirigée du N.E. au S.O. Au contraire, pour ceux qui sont situés au-dessous de l'Equateur, il semblera souffler un vent du S.O. au N.E.

La persistance de ces courants d'air dans les régions tropicales est une confirmation du mouvement de la Terre, qui sert de base à leur explication.

C'est une cause du même genre qui produit dans la chute d'un corps pesant une déviation de la verticale.

Si la Terre était en repos, un corps qui tombe suivrait la direction du fil à plomb. — Mais si la Terre tourne, il n'en est pas nécessairement de même. — En effet, en vertu de la rotation, la partie supérieure du fil à plomb a une vitesse initiale plus grande que celle des parties inférieures. — Imaginons un corps qui tombe du point A, situé au-dessus de la surface de la Terre.

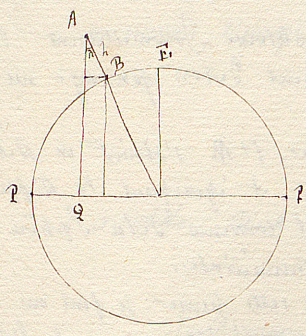
au moment où il quitte le point A, il a une vitesse initiale a qui fait parcourir à lui et au point A l'espace at pendant le temps t de la chute, tandis que l'extrémité B ne parcourt que $a't$ dans le même temps $(a'<a)$.



Le point pesant arrivera donc en C distant du point B d'une quantité at en vertu de l'indépendance des mouvements simultanés. Le point B n'est encore arrivé qu'en D. — Ainsi, en vertu du mouvement de rotation de la Terre, les corps pesants doivent tomber un peu à l'E. du fil à plomb. — C'est ce que l'observation confirme quand elle est faite sur des corps qui tombent d'une grande hauteur, et même la déviation se trouve sensiblement égale à celle qui avait été calculée.

Nous allons la calculer d'une manière approchée. — Soit $AB = h$, r le rayon du parallèle. On aura

$$a' = \frac{2\pi r}{T} \qquad T = 86164''.$$



Quant à a, il est facile de l'exprimer au moyen du temps T, de r et de h. Soit PP' la ligne des pôles. Le rayon du cercle décrit pour A est $AQ = r + h\cos\lambda$, λ étant la latitude.

$$a = \frac{2\pi(r + h\cos\lambda)}{T}$$

donc

$$BC - BD = \frac{2\pi h \cos\lambda}{T}\, t.$$

$$h = \tfrac{1}{2} g t^2$$

en regardant g comme constant. Donc $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Donc

$$DC = \frac{2\pi h \cos\lambda \sqrt{2h}}{T\sqrt{g}}.$$

Une dernière preuve a été tirée de l'expérience de Mr Foucault.

Nous admettrons donc ce mouvement de rotation de la Terre comme parfaitement démontré, et nous allons nous occuper des astres qui se déplacent sur la sphère céleste.

Du Soleil.

Nous allons étudier les Lois du mouvement apparent du Soleil sur la sphère céleste considérée comme fixe. — Si nous reconnaissons plus tard que les Étoiles que nous supposions fixes et auxquelles nous rapportions le Soleil, se déplacent sur cette sphère par un mouvement propre, nous ferons quelques rectifications.

Dans les principaux observatoires, on observe journellement l'ascension droite du Soleil et la déclinaison au moment de son passage au méridien.

ascension droite.

Nous avons vu que, pour une Étoile, l'AR s'obtient en déterminant l'heure exacte de son passage au méridien, et cherchant la différence entre cette heure et celle du passage d'un point connu de la sphère céleste.

Pour les Étoiles, cette l'observation est immédiate.

Pour le Soleil, la détermination de cette heure se fait au moyen des fils rectangulaires placés dans la lunette. Mais, comme le Soleil n'apparaît pas dans la lunette comme un point lumineux, on est obligé d'observer les heures du passage des deux bords, et de prendre la moyenne pour avoir celle du passage du centre du Soleil.

Le Soleil ayant un mouvement apparent de l'E. à l'O. avancera dans la lunette, qui renverse, de l'O. à l'E. — etc.

On trouve que l'AR du Soleil n'est pas invariable. Donc il n'est pas fixe comme les Étoiles.

Déclinaison.

Tout se réduit à déterminer la dist. zénithale du Soleil : soit z. Soit p la dist. zén. du pôle : on a toujours

$$D. \odot = 90° - (z + p)$$

D étant > 0 ou < 0 suivant que la déclinaison est australe ou boréale.

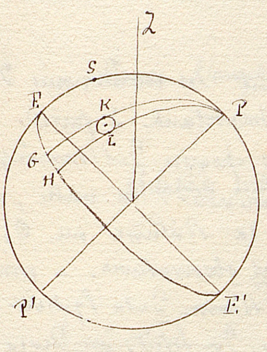
On se sert du cercle mural. — Mais, comme le $\odot$ n'est pas un point, il faut observer le bord inférieur et le bord supérieur, ce qu'on fait avec le fil horizontal, et l'on prend la moyenne. Mais ces observations ne peuvent être faites en même temps. Cependant comme, au moment du passage du $\odot$ dans le méridien, il y a minimum de distance zénithale, si les observations sont faites, l'une un peu avant le passage, l'autre, un peu après, il y aura une exactitude suffisante.

On trouve aussi que la déclin. du $\odot$ varie avec les époques de l'année.

Diamètre apparent. — Les deux observations nécessaires à la détermin

de la déclinaison fournissent le diamètre apparent du ☉ dans le sens vertical.

Quant au diamètre apparent horizontal, on peut le déduire de l'ascension droite. — En effet, supposons que le Soleil n'ait pas de mouvement propre.



Soit S la position du centre quand il est au méridien, et imaginons le disque du ☉ quelque part sur la sphère céleste hors du méridien. Faisons passer deux méridiens tangents au disque du Soleil. Ils interceptent sur l'équateur un arc GH qui ne sera pas la même chose que le diam. apparent, mais qui pourrait servir à le déterminer. GH se trouve en notant les heures de passage des deux bords et en réduisant en un angle α. — Or, dans le triangle sphérique KLP, on connait KP et PL, qui sont

$$PK = PL = 90° - \Delta$$

et nous avons vu comment on a Δ. — De plus on connait l'angle en P, qui est α. Donc, si D est le diam. apparent,

$$\cos D = \sin^2\Delta + \cos^2\Delta \cos\alpha$$

$$1 - 2\sin^2\frac{D}{2} = 1 - 2\cos^2\Delta \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$2\sin\frac{D}{2} = 2\cos\Delta \sin\frac{\alpha}{2}$$

et, comme D et α sont très-petits,

$$D = \alpha \cos\Delta.$$

Mais, comme le ☉ a un mouvement propre, son mouvement diurne est plus lent que celui de la sphère céleste, et, pour parcourir 360°, il emploie, non pas un jour sidéral, mais un temps plus long qui est connu par la différence des moments de deux passages au méridien, différence observée à l'horloge sidérale de l'observatoire, et qui sera $24^h + f$. Donc dans une heure, il ne décrit pas $\frac{360°}{24}$, mais bien $\frac{360°}{24+f}$, et il faudra en tenir compte pour avoir l'arc GH.

Les observations des dist. zénithales précédentes doivent être corrigées de la réfraction à l'aide des tables et du barom. et du thermom. Cette correction, nous le savons, n'est pas la même pour le bord supér. et le bord inférieur, et la différence est surtout appréciable près de l'horizon.

Quant aux ascensions droites, elles ne sont pas affectées par la réfraction.

La déclinaison, l'ascension droite et le diam. apparent du ☉ sont les trois éléments qu'il importe d'étudier. On trouve qu'ils sont variables d'une époque à l'autre.

L'ascension droite, qu'on compte de l'O. à l'E. en sens contraire du mouvement diurne, va toujours en croissant, et augmente chaque jour de quantités inégales.

La déclinaison est aussi toujours variable. En février, elle est australe, et diminue jusqu'en Mars, où elle est nulle. Elle augmente alors, et devient maximum en Juin. Elle décroît jusqu'au 21 Sept. où elle

est nulle, puis ... &c. (Leverrier).

Le diamètre apparent varie aussi. Il est maximum en Hiver et minimum en Été, du moins pour l'Époque actuelle. Ce pourra ne être autrement plus tard. Le maximum est de 32' 35",6, le minimum, de 31' 31". En moyenne, cela fait 32' 3",3.

Avant d'en venir aux lois que suivent les coordonnées du Centre du ☉, nous parlerons d'abord d'une correction importante à faire. — Le diam. du ☉ n'étant pas le même à toutes les époques de l'année, il s'ensuit que la distance de cet astre à la Terre est variable. En outre, comme les dimensions de la Terre sont comparables à la distance au ☉, le diam. apparent doit varier selon la position des observateurs. — Ainsi, dans deux lieux situés aux extrémités d'un même diam. de la Sphère Terrestre, en observant au même instant le diam. du Soleil, on devra trouver une petite différence entre les résultats. — De là l'utilité de réduire tous les résultats à ce qu'ils eussent été si l'on eût observé du centre de la Terre. Le choix de cette station est très-naturel. Elle devait se présenter tout d'abord à l'esprit des astronomes.

Cela nous conduit à parler des parallaxes en Général.

Des Parallaxes.

On appelle Parallaxe d'un astre (dont la distance n'est pas tellement grande par rapport aux dimensions de la Terre qu'on puisse faire abstraction de ces dernières) l'angle qui, ayant son sommet au centre de l'astre, soutend le Rayon de la Terre qui aboutit à l'observateur. — En d'autres termes, la Parallaxe est l'angle sous lequel on verrait, du centre de l'astre, le Rayon de la Terre.

Quand l'astre est à l'horizon, on a la Parallaxe Horizontale, et quand il est au-dessus de l'horizon, Parallaxe de Hauteur.

Le terme Parallaxe signifie changement. On entend ici le changement qui s'opère dans la position apparente d'un astre sur la voûte céleste quand on l'observe d'un point de la surface de la Terre au lieu de l'observer du centre.

On voit facilement que l'effet de la Parallaxe est d'abaisser l'astre vers l'horizon dans le plan vertical, et d'accroître sa distance Zénithale sans toucher à son azimuth: — cet effet est contraire à celui de la Réfraction.

La distance Zénithale observée en un lieu de la Terre, et corrigée de la Réfraction, est dite distance Zénithale apparente, et celle qu'on observerait au centre de la Terre, distance Zénithale vraie.

La différence est égale à la parallaxe:

$$Z_v = Z_a - p.$$

Relation entre la Parallaxe horizontale et la Distance de l'astre au centre de la Terre.

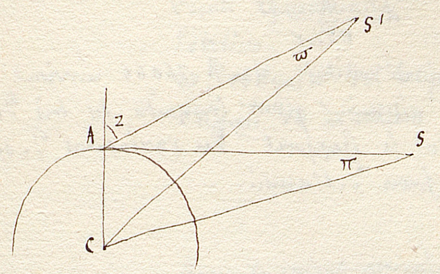
Soit π la parallaxe horizontale, R le Rayon de la Terre, D la Distance de l'astre,

$$\sin \varpi = \frac{R}{D}$$

et, comme l'angle π est très-petit,

$$\pi = \frac{R}{D}.$$

Relation entre la Parallaxe de hauteur et la Parallaxe horizontale.



Soit ϖ la parallaxe de hauteur $AS'C$, z la distance zénithale apparente de l'astre. On a

$$\frac{\sin \varpi}{\sin z} = \frac{AC}{CS'}$$

$$\sin \varpi = \frac{AC}{CS'} \sin z.$$

Soit π la parallaxe horizontale le même jour. En un jour, la distance de l'astre au centre de la Terre n'a pas varié sensiblement. De sorte qu'on peut supposer $CS = CS' = D$. On a donc

$$\frac{AC}{CS'} = \frac{R}{D} = \sin \pi$$

et partant

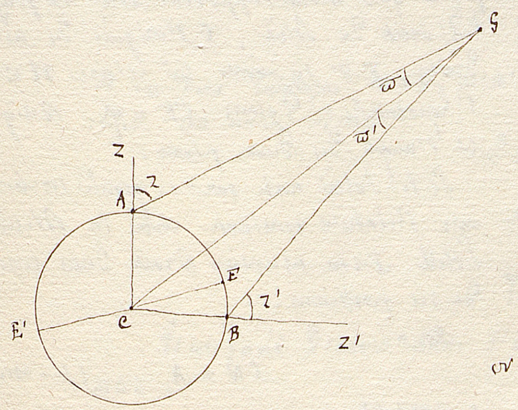
$$\sin \varpi = \sin \pi \sin z$$

et, comme ϖ et π sont petits,

$$\varpi = \pi \sin z.$$

On détermine directement π, et l'on peut calculer ϖ.

Calcul de la Parallaxe horizontale.



À un même instant, on observe l'astre de deux points de la Terre, A et B, situés sur le même méridien, et l'on détermine ses distances zénithales z et z'. On a, en appelant ϖ et ϖ' ses parallaxes de hauteur et π sa parallaxe horizontale,

$$\varpi = \pi \sin z$$

$$\varpi' = \pi \sin z'$$

or

$$z = \varpi + ACS \qquad z' = \varpi' + SCB$$

$$z + z' = \varpi + \varpi' + ACB$$

Or ACB est la somme des deux latitudes λ et λ' des deux points. On aura donc

$$\lambda + \lambda' + \pi (\sin z + \sin z') - (z + z') = 0$$

D'où

$$\pi = \frac{z+z' - (\lambda+\lambda')}{\sin z + \sin z'}.$$

A l'aide de la formule $\pi = \frac{R}{D}$, on peut calculer la distance du ☉ à la terre un jour où l'on a calculé la parallaxe. — Nous verrons plus tard comment on en déduit la distance pour un jour quelconque. — En effet, on en tire

$$d = \frac{R}{\pi}$$

Dans le calcul numérique, il faut prendre

$$d = \frac{R}{\pi \sin 1''}$$

Comme on a trouvé $\pi = 8'',57$, on en conclut $d = R.24068$ environ.

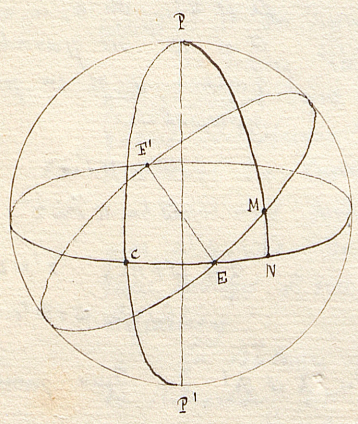
Cette détermination n'est pas nécessaire pour connaître les lois du mouvement du Soleil. — Ce qui est essentiel, c'est le rapport des variations de ses distances à la terre pour les différents jours de l'année.

Ayant maintenant corrigé de la parallaxe les ascensions droites et les déclinaisons du Soleil pour les différents jours de l'année, on pourra facilement construire la trajectoire de cet astre sur un globe céleste en prenant un certain méridien pour origine des ascensions droites. — Détails. — figure. —

La courbe qu'on obtiendra ainsi sera seulement la projection de la trajectoire du ☉ sur la sphère céleste. On trouve que c'est un grand cercle, de sorte que l'orbite est une courbe plane, dont le plan passe par le centre de la terre.

Toutefois cette construction grossière ne pourrait suffire pour établir un résultat aussi important. aussi le vérifie-t-on pour le plus d'exactitude par le calcul.

Soit EE'M la circonférence que nous supposons être la projection de l'orbite du Soleil, C l'origine des ascensions droites, EE' les points où l'arc MEE' coupe l'équateur. Posons CE = φ. désignons par ω l'angle des deux plans.



Si le Soleil reste sur ce grand cercle, il y aura une relation constante entre la déclinaison du Soleil et son ascension droite dans une quelconque de ses positions.

On a

$$CN = A \qquad (A = \text{ascens. droite})$$

et par suite

$$EN = A - \varphi$$

$$MN = \Delta \qquad (\Delta = \text{déclinaison})$$

Dans le triangle rectangle ENM, on peut poser entre ses divers éléments la relation

$$\text{Cot.}\ \Delta \sin(A-\varphi) = \text{Cot.}\ \omega$$

$$\text{Tg}\ \Delta = \sin(A-\varphi)\ \text{Tg}\,\omega$$

au moyen de deux observations d'AR et de déclinaison, on pourra déterminer ω et φ de manière à vérifier cette équation. — Une fois ω et φ déterminés, on s'assure que toutes les autres observations satisfont à cette équation; ce qui donnera autant de confirmations que d'équations moins deux.

Cette vérification a lieu. — En conséquence

La projection de la trajectoire du Soleil sur la Sphère céleste est un grand cercle qu'on a appelé Écliptique.

Points Équinoxiaux.

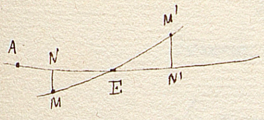
Solstices.

ω, obliquité de l'Écliptique $= 23°\ 28'$ environ.

Origine des ascensions droites. — Inconvénient.

Dans le calcul précédemment indiqué, on ne se contente pas de deux observations. on en considère toute une série, et on les combine par la méthode des moindres carrés.

Voici une autre manière de procéder qui donne avec une grande approximation l'époque du passage du Soleil à l'équinoxe, et ω; au moyen de deux observations faites dans le voisinage de l'équinoxe, l'une un peu avant, et l'autre un peu après.



Soit A une origine qcq. Un peu avant le passage à l'équinoxe, on observe l'asc. Dr. $\alpha = AN$ et la déclin. $\delta = MN$. à ce moment, 20 mars, à Midi, la déclin. est australe. — Le lendemain à Midi, elle est boréale, et l'on note $AN' = \alpha'$ et $M'N' = \delta'$. — Il est évident que, dans l'intervalle de ces deux observations, la déclinaison a été nulle. — Nous aurons, en conservant les notations adoptées,

$$AE = \varphi \quad EN = \alpha - \varphi \quad EN' = \varphi - \alpha'.$$

or les deux triangles MNE, M'N'E sont sensiblement rectilignes et semblables. on aura donc

$$\delta : \alpha - \varphi :: \delta' : \varphi - \alpha'$$

$$\delta\varphi - \delta\alpha' = \delta'\alpha - \delta'\varphi$$

$$\varphi = AE = \frac{\delta\alpha' + \alpha\delta'}{\delta + \delta'}$$

Il est facile d'avoir aussi l'obliquité. on a en effet dans le triangle MNE:

$$\delta = (\alpha - \varphi)\ \text{Tg}\,\omega$$

$$\text{Tg}\,\omega = \frac{\delta}{\alpha - \varphi}$$

or

$$\alpha - \varphi = \alpha - \frac{\alpha\delta' + \delta\alpha'}{\delta + \delta'} = \frac{\alpha\delta - \delta\alpha'}{\delta + \delta'} = \frac{\delta(\alpha - \alpha')}{\delta + \delta'}$$

$$\text{Tg}\,\omega = \frac{\delta + \delta'}{\alpha - \alpha'}$$

Enfin, si l'on veut avoir l'époque précise du passage du Soleil à l'Equinoxe, on n'aura qu'à noter les époques t et t' auxquelles on fait les observations en M et M'. Appelons t_1 l'époque inconnue. Nous aurons

$$\delta - q : q - \delta' :: t_1 - t : t' - t.$$

d'où t_1 en fonction de q. – Substituant à q sa valeur, on aura t_1 en fonction des données de l'observation.

On peut aussi déterminer l'obliquité ω de l'écliptique au moyen de l'observation du Solstice.

Si l'on observe la déclinaison du ☉ au 21 Juin, et les jours qui précèdent et qui suivent, on voit qu'elle varie extrêmement peu. Cela est facile à comprendre puisque, vers cette époque, le ☉ atteint sa déclinaison maximum, et que, dans le voisinage du maximum d'une quantité, ses variations sont insensibles. – Néanmoins, on ne trouvera pas rigoureusement les mêmes nombres. – Avec les résultats de l'observation, en prenant pour abscisses les jours, pour ordonnées les déclinaisons, construisons une courbe, et menons-lui une tangente horizontale. Le point de contact répondra à une certaine abscisse, qui donnera l'époque du passage du Soleil au Solstice. On aura aussi la déclinaison maxima du ☉, qui mesure ω. – On a donc résolu la question, un peu grossièrement il est vrai, puisqu'on a eu recours à une construction graphique, mais le calcul donnerait la même incertitude.

On trouve ainsi

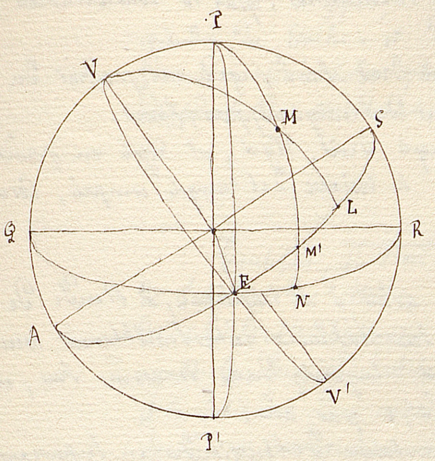
$$\omega = 23^\circ\ 27'\ 57''$$

Cette inclinaison est à peu-près constante. On trouve qu'elle varie actuellement de 48" par siècle, en diminuant. – Plus tard, cette diminution pourra se changer en une augmentation.

Nous avons dit que c'était à partir de l'équinoxe de Printemps que les astronomes comptent les ascensions droites. – Nous indiquerons dans la suite les raisons de ce choix. – Et, au moyen des asc. dr. et des déclinaisons des différentes étoiles, il est facile de dresser une carte d'étoiles, ou bien un catalogue. Mais ces catalogues construits à des époques différentes au moyen de ces coordonnées diffèrent sensiblement, et même le désaccord devient énorme quand on compare les cartes actuelles aux observations faites il y a 2000 ans, à l'origine de l'astronomie. Il importe donc de savoir la loi de ces variations, et pour cela, il est plus commode de quitter les coordonnées de tout-à-l'heure, et d'en prendre de nouvelles.

Pour cela, j'imagine un axe perp. au plan de l'écliptique. Il va percer la sphère en deux points V et V' qui sont, le premier, le Pôle Boréal de l'écliptique, le second, son Pôle austral.

Soit M un astre quelconque. EN et MN sont son ascension droite et sa déclinaison, c.à.d. les anciennes coordonnées, α et δ. Je mène le grand cercle VMV'. Il coupe le plan de l'écliptique en L. Sera EL est la Longitude et ML la Latitude de l'astre. – Soit sur la figure



$MN = \delta \quad EN = \alpha \quad ML = \lambda \quad LE = l.$

et proposons-nous ce

Problème.

Étant donnés δ et α, trouver l et λ, et réciproquement.

Il est facile de voir que c'est une question de Trigonométrie sphérique. — En effet, considérons le triangle sphérique VPM. VP est connu; c'est ω, l'inclinaison de l'équ. sur l'écliptique.
PM l'est aussi, c'est $90° - \delta$.
L'angle $VPM = VPE + EPN = 90° + \alpha$.
Connaissant 3 éléments de ce triangle, on en déduit les autres, par exemple, VM qui est $90° - \lambda$ et l'angle MVP qui vaut $90° - l$.

Calculons l. Il nous faut pour cela une relation entre les côtés VP, PM, et les angles VPM, PVM.

$$\mathrm{Sin}\, VP\, \mathrm{Cot}\, PM = \mathrm{Cot}.\, PVM\, \mathrm{Sin}\, VPM + \mathrm{Cos}\, VP\, \mathrm{Cos}.\, VPM$$

ou

$$\mathrm{Sin}\,\omega\, \mathrm{Tg}\,\delta = \mathrm{Tg}\, l\, \mathrm{Sin}(90°+\alpha) + \mathrm{Cos}\,\omega\, \mathrm{Cos}(90°+\alpha)$$

$$\mathrm{Tg}\, l = \frac{\mathrm{Sin}\,\omega\, \mathrm{Tg}\,\delta + \mathrm{Sin}\,\alpha\, \mathrm{Cos}\,\omega}{\mathrm{Cos}\,\alpha} \qquad (1)$$

Pour avoir λ, il faut une relation entre les 3 côtés et un angle:

$$\mathrm{Cos}\, VM = \mathrm{Cos}\, VP\, \mathrm{Cos}\, PM + \mathrm{Sin}\, VP.\mathrm{Sin}\, PM.\, \mathrm{Cos}\, VPM$$

ou

$$\mathrm{Sin}\,\lambda = \mathrm{Cos}\,\omega\, \mathrm{Sin}\,\delta - \mathrm{Sin}\,\omega\, \mathrm{Cos}\,\delta\, \mathrm{Sin}\,\alpha \qquad (2)$$

Si l'on veut résoudre le problème inverse, on procède de même. Les données sont, dans le triangle VPM

$$VM = 90 - \lambda \qquad VP = \omega \qquad MVP = 90 - l$$

les inconnues

$$PM = 90° - \delta \qquad VPM = 90° + \alpha$$

on aura

$$\mathrm{Sin}\,\delta = \mathrm{Sin}\,\lambda\, \mathrm{Cos}\,\omega + \mathrm{Cos}\,\lambda\, \mathrm{Sin}\,\omega\, \mathrm{Sin}\, l. \qquad (3)$$

et

$$\mathrm{Cot}.\, VM\, \mathrm{Sin}\, VP = \mathrm{Cot}.\, VPM\, \mathrm{Sin}\, PVM + \mathrm{Cos}\, VP\, \mathrm{Cos}\, PVM$$

$$\mathrm{Tg}\,\lambda\, \mathrm{Sin}\,\omega = -\mathrm{Tg}\,\alpha\, \mathrm{Cos}\, l + \mathrm{Cos}\,\omega\, \mathrm{Sin}\, l$$

$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{Cos}\,\omega\, \mathrm{Sin}\, l - \mathrm{Tg}\,\lambda\, \mathrm{Sin}\,\omega}{\mathrm{Cos}\, l} \qquad (4).$$

Il est bon de remarquer que les formules (3) et (4) peuvent se déduire de (2) et de (1) en changeant δ en λ, α en l, et ω en $-\omega$.

Telles sont les formules relatives à un astre quelconque. S'il s'agit du ☉, dont la latitude est constamment nulle, elles deviennent

$$\begin{cases} \mathrm{Tg}\,\alpha = \mathrm{Cos}\,\omega\, \mathrm{Tg}\, l \\ \mathrm{Sin}\,\delta = \mathrm{Sin}\,\omega\, \mathrm{Sin}\, l \end{cases}$$

On pourrait d'ailleurs y arriver directement, par la considération du triangle rectangle EM'N. Car

1°. Le sinus d'un côté de l'angle droit $\sin \delta$, égale le produit du sinus de l'hypoténuse $\sin l$, par le sinus de l'angle opposé, $\sin \omega$.

2°. La tg. d'un côté de l'angle droit, $tg\, \alpha$, est égale au produit de la tg. de l'hypoténuse $tg\, l$, par le cosinus de l'angle compris, $\cos \omega$.

Si l'on rapporte tous les astres à l'écliptique, à l'aide de ces nouvelles coordonnées, on verra que la latitude reste sensiblement constante, tandis que les longitudes augmentent toujours dans le même sens, et cette augmentation est en moyenne de 50",1 par an.

On peut concevoir cette augmentation de longitude en supposant que la sphère céleste tourne autour de l'axe de l'écliptique dans le sens du mouvement propre du soleil. Car alors, la latitude restera constante, tandis que les longitudes augmenteront. — Mais le même phénomène peut se concevoir d'une autre manière, en imaginant que l'axe de l'écliptique reste fixe ainsi que la sphère céleste, et que ce soit le plan de l'équateur qui se déplace, de manière que son inclinaison sur l'écliptique reste constante, et que le point d'intersection E de ces deux grands cercles recule sur l'écliptique en sens contraire des longitudes.

De ces deux mouvements, lequel est le plus probable ? Le premier exigerait que toute la sphère se déplaçât : dans la 2e. hypothèse au contraire, il suffit d'admettre que l'axe de la terre se déplace de façon à produire cet accroissement de longitude. — C'est elle qui la plus probable, et nous en démontrerons la réalité.

Il est facile de voir quelle est la nature de ce mouvement de l'axe de la terre autour de celui de l'écliptique. En effet, l'équateur se déplaçant de façon à conserver à très-peu près la même obliquité sur l'écliptique, et à rétrograder sur ce cercle de 50",1 par année, il faut que l'axe de la terre tourne autour de celui de l'écliptique de façon à décrire, toujours dans le même sens, un cône droit.

Pour que l'équinoxe décrive sur l'écliptique une révolution complète, il faut environ 25900 ans ou $\frac{360°}{50'',1}$ ans. — Il n'y a pas d'intérêt à faire le calcul avec une plus grande approximation : car il y a dans ce phénomène de la précession des équinoxes des inégalités et des variations dont nous parlerons tout-à-l'heure.

Ainsi, le déplacement de l'équinoxe est de sens contraire au mouvement propre du ☉, ou bien dans le même sens que le mouvement diurne apparent.

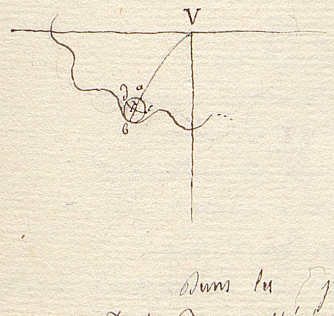
Pour les anciens, qui croyaient la terre fixe, l'équinoxe devait donc avancer : de là le nom qu'ils donnèrent au phénomène qui nous occupe. — Les modernes, au contraire, regardant la terre comme mobile autour de son axe, le déplacement de l'équinoxe sera en sens contraire du mouvement de la terre : l'équinoxe rétrogradera sur l'écliptique : aussi a-t-on substitué à l'ancienne dénomination celle de rétrogradation des points équinoxiaux.

C'est Hipparque qui le premier a reconnu cette variation des longitudes des Etoiles : et Ptolémée, 300 ans plus tard, confirma cette remarque par des observations plus précises. – Toutefois, il trouva un nombre bien différent du véritable, car il dit que l'Equinoxe rétrogradait de 36" par an.

Toutefois, si l'on détermine à des époques rapprochées les longitudes et les latitudes des Etoiles, on voit que le mouvement de l'axe de la Terre autour de celui de l'Ecliptique ne représente que la moyenne des observations. – ainsi, ayant la longitude et la latitude à un instant, si l'on calcule la longitude et la latitude du même astre pour une autre époque en ayant seulement égard au mouvement conique précédent, on ne trouve que des résultats approchés.

Bradley est le premier qui ait donné la loi de ces variations. Il a montré que l'ensemble de tous les phénomènes peut se concevoir en supposant que l'axe de la Terre ne décrive pas précisément un cône droit, mais qu'il tourne autour d'un axe fictif qui, lui, décrirait un cône droit. ainsi, concevez une première droite décrivant un cône droit ayant pour axe celui de l'Ecliptique, et pour angle au sommet $\omega = 23° 28'$, et d'autre part, une seconde droite passant constamment par le centre de la Terre, emportée par la génératrice de ce cône, et dont le mouvement relatif autour de la première serait de décrire une petite ellipse. C'est cette seconde droite qui donnera à chaque instant la position de l'axe de l'axe de la Terre. – Pour un observateur emporté avec l'axe de la Terre, cet axe semblera décrire une ellipse, mais en réalité, le mouvement sera beaucoup plus compliqué, et la trajectoire sur la voûte céleste sera une ligne sinueuse. – Le grand axe de cette petite ellipse est dirigé vers le pôle de l'Ecliptique, et correspond sur la Sphère à un angle de de 18",5. – Le petit axe a pour longueur 13",74. Le temps employé par l'axe de la Terre à décrire cette petite ellipse est de 18 ans 2/3.

Voyons quelles modifications ce mouvement de l'axe de la Terre doit apporter dans les longitudes et les latitudes.



Quand l'axe a son extrémité en b, à l'extrémité du grand axe, sa longitude est la longitude moyenne, mais la latitude vraie est supérieure à la latitude moyenne de 9",25. Quand il est en a, la latitude est moindre que la latitude moyenne de 9",25. – Lorsqu'au contraire l'astre est en d, à l'extrémité du petit axe, la latitude est exacte, et la longitude surpasse la longitude moyenne de Id, qui n'est pas tout-à-fait la moitié de 13",74, mais que l'on trouve égal à $\frac{6".87}{\cos \lambda}$, λ étant la latitude.

Dans les positions intermédiaires, la longitude et la latitude sont toutes deux altérées.

Il faut donc bien distinguer les longitude et latitude vraies des longitude et latitude moyennes. – Les secondes sont celles qui auraient lieu si l'axe

de la Terre n'avait pas d'autre mouvement que celui d'un cône, et les premières sont celles qui ont lieu quand on tient compte des Nutations.

De même la position de l'Equinoxe vrai n'est pas exactement celle qui résulte du simple mouvement de précession en vertu duquel l'axe de l'Equateur décrirait un cône droit. Il sera tantôt en avant, tantôt en arrière. On distingue donc l'Equinoxe vrai de l'Equinoxe moyen.

C'est à partir de l'Equinoxe moyen qu'on compte les Longitudes et les Latitudes.

L'obliquité de l'écliptique varie aussi de 18",5 en 18 ans 2/3. Il y a donc aussi à distinguer l'Equateur vrai et l'Equateur moyen. C'est à partir de ce dernier qu'on compte les Latitudes moyennes.

Il nous reste maintenant à étudier la véritable forme de la Trajectoire du Soleil : car jusqu'ici, nous savons seulement qu'elle est plane. – Il faut connaître à la fois la vitesse angulaire avec laquelle le ☉ parcourt cette trajectoire à chaque instant, et sa distance à la Terre. Car ces deux choses ne sont pas autant indépendantes l'une de l'autre, comme elles le paraissent au premier abord, et les variations de la vitesse angulaire du ☉ dépendent précisément de celles de sa distance à la Terre.

Une simple observation nous montre sur le champ que la vitesse angulaire du Soleil n'est pas constante. Car, en prenant jour par jour l'accroissement de longitude, on voit qu'il n'est pas proportionnel à l'accroissement du Temps. – Ainsi, à deux époques assez rapprochées, prenez l'accroissement de longitude, et divisez-le par l'intervalle de temps : vous aurez la vitesse angulaire moyenne. Si à diverses époques, vous faites la même opération, vous trouverez des Résultats variant d'après une loi assez compliquée, de sorte qu'il est difficile d'en tirer des conséquences utiles.

Mais on peut déterminer chaque jour la variation du diam. apparent, et en déduire les variations de la distance.



Soit S le Soleil, O le centre de la Terre, Δ l'angle AOB, c.à.d. le diam. apparent de l'astre, D sa distance au centre de la Terre, et 2R le diamètre du ☉. Le triangle rectangle OAS donne

$$\sin\frac{\Delta}{2} = \frac{R}{D}$$

et, comme Δ est un très-petit angle,

$$\Delta = \frac{2R}{D}$$

or 2R est constant. Donc

Le diamètre apparent est en raison inverse de la distance.

Si donc on fait une table donnant pour chaque jour le diam. apparent et la vitesse angulaire, on verra que

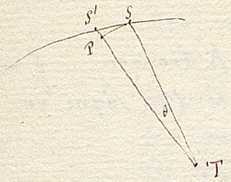
La vitesse angulaire moyenne est proportionnelle au carré du diamètre apparent, par conséquent, en raison inverse du carré de la distance à la Terre.

C'est là une des lois de Kepler.

(On en peut déduire cette conséquence remarquable, que le Soleil ne parcourt pas son orbite avec une vitesse constante. Car, si cela était, la vitesse angulaire apparente devrait varier en raison inverse de la simple distance, tandis que l'observation indique une variation plus rapide.)

Kepler a énoncé cette loi sous une forme un peu différente, en disant que les aires décrites par le rayon vecteur sont proportionnelles aux temps.

Mais il est facile de ramener le 1er énoncé au second.



Soit u la vitesse angulaire, T la position de la Terre, S et S' deux positions successives du ☉ sur son orbite pendant un intervalle de temps très court τ. Nous aurons

$$\text{angle } S'TS = u\tau$$

or, d'après le 1er énoncé

$$u = \frac{c}{ST^2}$$

donc

$$S'TS = u\tau = \frac{c\tau}{ST^2} = \theta$$

$$c.\tau = \theta r^2$$

Or $r^2\theta$ n'est autre chose que l'aire $S'TS$ qui ne diffère du secteur circulaire que d'un infiniment petit du 2e ordre, quelle que soit d'ailleurs la forme de l'orbite du soleil. — Donc l'aire décrite par le rayon vecteur de cet astre s'accroît d'une quantité proportionnelle au temps. C'est là le second énoncé, celui de Kepler. — Mais sous cette forme, il est moins facile à vérifier que sous la première.

Concevons qu'on construise sur un plan les diverses positions du Soleil au moyen de sa longitude et de son diam. apparent. On tracera une ligne semblable à celle que le Soleil décrit réellement. On trouve ainsi que

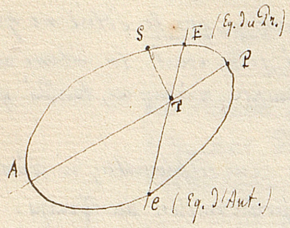
La trajectoire du ☉ est une ellipse dont le centre de la Terre occupe un des foyers.

C'est une seconde loi de Kepler.

Nous savons d'ailleurs la vitesse avec laquelle cette ellipse est parcourue. Elle est en raison inverse du carré de la distance.

Nous connaîtrions donc tout ce qui a rapport au soleil, si nous connaissions la grandeur de son orbite.

Il est essentiel de vérifier par le calcul une loi aussi importante, et voici comment nous ferons cette vérification. — Nous prendrons l'équation de l'ellipse rapportée à son foyer et à une ligne fixe, qui représentera la ligne des équinoxes, pour axe polaire. Dans cette équation entrera nécessairement l'angle ε que fait l'axe polaire avec le rayon vecteur mené à l'extrémité du petit axe, c.à.d. au périgée, et l'excentricité de l'ellipse. Par deux observations, nous calculerons ces deux constantes, et les substituant dans l'équation de la courbe, il faudra qu'elle soit vérifiée par la distance du soleil et sa longitude pour une époque quelconque.



L'équation de l'ellipse rapportée au foyer T, par rapport au foyer à l'axe polaire ATP dirigé vers le sommet P le plus voisin, est

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1+\frac{c}{a}\operatorname{Cos}\omega} = \frac{\frac{a^2-c^2}{a}}{1+\frac{c}{a}\operatorname{Cos}\omega} = \frac{a\left(1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right)}{1+\frac{c}{a}\operatorname{Cos}\omega}$$

posant $\frac{c}{a} = e$

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\operatorname{Cos}\omega}$$

Ces angles se comptent dans le sens ESA. $\begin{cases} \omega = STP \\ \theta = STE \\ \varepsilon = ETP \end{cases}$

Soit T la terre, P le périgée, A l'apogée, S une position quelconque du Soleil, ET e la ligne des équinoxes d'où l'on compte les Longitudes. — on aura

$$1/r = \frac{1+e\operatorname{Cos}(\theta-\varepsilon)}{a(1-e^2)}$$

Déterminons maintenant les trois constantes arbitraires a, e et ε qui entrent dans cette formule.

D'abord, a est arbitraire, puisque nous ne voulons calculer que des quantités proportionnelles aux distances du ☉ à la ♁. — Quant à ε et e, on peut les obtenir par deux observations qui donneront r, et par suite, deux équations entre ε et e.

On peut aussi obtenir ces deux constantes séparément.

Détermination de l'excentricité.

Ainsi l'excentricité peut se déduire de la comparaison des diamètres apparents maxima et minima du Soleil. — En effet, le rayon r étant réciproquement proportionnel au diamètre apparent Δ, on peut donc poser

$$\frac{1}{r} = k\Delta$$

et par suite, l'équation précédente peut s'écrire

$$k\Delta = \frac{1+e\operatorname{Cos}(\theta-\varepsilon)}{a(1-e^2)}$$

Le diam. apparent sera le plus grand possible quand $\operatorname{Cos}(\theta-\varepsilon) = 1$ c. à d. quand $\theta = \varepsilon$. Soit Δ' cette valeur maxima. on aura

$$k\Delta' = \frac{1+e}{a(1-e^2)} = \frac{1}{a(1-e)}$$

au contraire, il sera le plus petit possible quand $\operatorname{Cos}(\theta-\varepsilon) = -1$, ou $\theta = \varepsilon+\pi$. appelons Δ'' ce diam. apparent minimum : nous aurons

$$k\Delta'' = \frac{1-e}{a(1-e^2)} = \frac{1}{a(1+e)}$$

Divisant membre à membre ces deux équations

$$\frac{\Delta'}{\Delta''} = \frac{1+e}{1-e}$$

d'où

$$e = \frac{\Delta'-\Delta''}{\Delta'+\Delta''}$$

Relation qu'on peut du reste obtenir sans partir de l'équation de l'Ellipse. (Faire le calcul).

Ainsi, l'observation des diamètres apparents du Soleil donne un

donne un moyen de calculer l'excentricité. Car, ayant déterminé jour par jour le diamètre apparent, et ayant ainsi formé une table, il sera facile par son inspection, d'en conclure les diamètres apparents maximum et minimum, et de substituer leurs valeurs dans l'égalité ci-dessus.

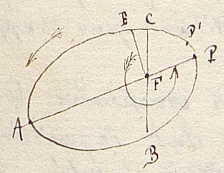
Mais, comme la détermination directe du diamètre apparent, qui est un petit angle laisse toujours quelque incertitude, on préfère déduire le diamètre de la vitesse angulaire du ☉ qu'on peut déterminer avec une précision plus grande. — Cette vitesse angulaire est, comme nous l'avons dit, le rapport de l'accroissement de longitude à l'intervalle de temps : et deux vitesses angulaires sont proportionnelles aux carrés des diamètres apparents qui leur correspondent. Par conséquent, les diamètres apparents sont proportionnels aux racines carrées des vitesses angulaires. — Si donc j'appelle v la vitesse angulaire du ☉ pour un jour quelconque, v' et v'' les valeurs maxima et minima de v pour toute l'année, on peut dans la formule précédente remplacer Δ' et Δ'' par $\sqrt{v'}$ et $\sqrt{v''}$; ce qui donne

$$e = \frac{\sqrt{v'} - \sqrt{v''}}{\sqrt{v'} + \sqrt{v''}}$$

On trouve ainsi que $e = 0,0168 = \frac{1}{60}$ environ. — Cette excentricité n'est pas constante absolument. Elle diminue d'environ 0,00004 par siècle, variation extrêmement petite, que ne pourrait indiquer l'expérience, et qui résulte des calculs et de la théorie.

Détermination de la Longitude du Périgée.

On peut trouver aussi directement la longitude du périgée.



Considérons l'ellipse décrite par le soleil, et dont la terre occupe un foyer F. Si par F nous traçons une ligne CB quelconque, elle partagera l'ellipse en deux parties dont les aires seront inégales, et, comme les aires décrites par le soleil sont proportionnelles au temps, les deux parties CPB, CAB de l'ellipse seront parcourues dans des temps inégaux. — Or la différence de longitude des points B et C est 180°; par conséquent, si l'on prend sur l'orbite deux points B et C dont les longitudes diffèrent de 180°, on trouvera que le temps employé pour aller de B en C sera différent de celui qui est nécessaire pour aller de C en B. — Mais si la droite BC est le grand axe, c.à.d. si elle joint le périgée à l'apogée, elle partagera l'ellipse en deux parties d'aires égales, et qui seront par conséquent parcourues dans le même temps.

Donc, pour déterminer la longitude du périgée, il faut trouver deux points A et BP dont les longitudes diffèrent de 180°, et qui soient tels que le soleil mette le même temps pour aller de A en P et de P en A. Cela est facile. Car on a jour par jour la longitude du soleil au moment de son passage au méridien, et l'on a l'heure précise de ce passage exprimée en temps sidéral. Si l'on prend une longitude au hasard, on trouvera dans le tableau l'instant où le soleil avait justement cette longitude, ou bien, si on ne le trouve pas, il est facile, par un calcul d'interpolation, de le déduire des nombres qui précèdent et qui suivent. — On augmente cette longitude de 180°, et l'on cherche l'instant correspondant t_1. — augmentez encore cette longitude de π. Vous aurez

directement ou par interpolation l'instant t_2 correspondant à $l+2\pi$. Généralement, surtout si l est pris au hasard, vous trouverez $t_1 - t_0$ différent de $t_2 - t_1$. Mais, par un tâtonnement facile, vous déterminerez quelle est la longitude qu'il faut prendre pour que $t_1 - t_0 = t_2 - t_1$: ce sera précisément là la longitude du périgée, ou bien celle de l'apogée. Mais la distinction est facile au moyen des diamètres apparents. Si le diamètre apparent est maximum, on a la longitude du périgée ; s'il est minimum, c'est de l'apogée qu'il s'agit.

Au premier janvier 1850, la longitude du périgée était de 280° 19' 38" en sorte que, sur la figure ci-dessus, pour aller de l'équinoxe E au périgée P, il faut décrire l'arc de 280° environ de gauche à droite en passant par le bas.

Cette longitude n'est pas constante. Elle augmente pour deux raisons. L'équinoxe du printemps se déplace de sorte que, quand même l'orbite du Soleil resterait fixe, le point E reculant sur cette orbite d'environ 50",1 par an, la longitude du périgée doit augmenter d'environ 50" par année. — Mais de plus, le périgée a un mouvement propre : car l'orbite du Soleil tourne autour du point F de 11",8 dans le sens où croissent les longitudes, de sorte qu'au bout d'une année, les longitudes augmentent de 61",9.

On entend par **année sidérale** le temps qu'il faut pour que le cercle horaire du Soleil revienne à la même position par rapport aux étoiles.

On peut déterminer sa durée avec une grande exactitude. En effet, des observations très anciennes nous ont appris quelle était la position du ☉ par rapport aux étoiles à des époques très reculées. Si nous observons aujourd'hui l'époque à laquelle le ☉ reprend juste la même position, comme on sait par la chronologie combien de jours sidéraux se sont écoulés depuis cette époque jusqu'à l'instant précis où nous faisons l'observation, en divisant le nombre de jours sidéraux par le nombre d'années qui se sont écoulées, nous aurons exactement la durée de l'année sidérale. — L'erreur ne peut provenir que d'inexactitudes dans les observations anciennes du jour où le Soleil se levait en même temps qu'une certaine étoile. Mais en admettant une erreur de une ou deux journées, cette erreur divisée par 2000 ans serait très petite.

On peut aussi trouver la durée de l'année sidérale par des observations plus modernes. Et, comme ces observations sont susceptibles d'une précision très grande, le résultat l'est aussi.

On distingue d'autres sortes d'années.

On entend par **année tropique** le temps qu'emploie le Soleil à revenir à l'équinoxe du printemps, ou mieux, le temps qui s'écoule entre deux passages successifs du Soleil à l'équinoxe du printemps. Sa durée en jours sidéraux est de 366^j,242264. — Elle peut également se conclure des observations anciennes. Par celles d'Hipparque

et de Ptolémée nous donnent les époques du passage du Soleil à cet équinoxe. On sait d'autre part depuis l'époque désignée par Hipparque ou Ptolémée jusqu'à nos jours combien il s'est écoulé d'années tropiques, de jours. En divisant le nombre total de jours par le nombre d'années, nous aurons la durée moyenne de l'année tropique en jours sidéraux.

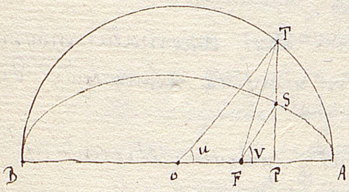
Si l'on voulait conclure de là la valeur de l'année sidérale, il n'y aurait qu'à remarquer que la différence entre les deux années provient seulement du déplacement de l'équinoxe du printemps, et que l'année sidérale est plus longue que l'année tropique du temps employé par le Soleil pour parcourir l'arc de l'écliptique correspondant à 50",1. Ce temps se trouve par une simple proportion. Car, dans l'année tropique, le Soleil a parcouru l'angle de 360° − 50",1. Donc

$$360^\circ - 50'',1 : 360^\circ :: 366^{d},242264 : x$$

D'où x.

On distingue encore l'année anomalistique. C'est l'intervalle entre deux passages successifs du Soleil au périgée. Le Soleil (fig. précédente) partant du périgée qui est en P, revient en P'. L'année anomalistique surpasse donc l'année sidérale du temps employé à parcourir PP'. Mais nous avons vu que le déplacement du périgée est de 61",9. Donc, par une proportion analogue à la précédente, on aura la durée exacte de l'année anomalistique en jours sidéraux.

Une fois tous les éléments du mouvement du Soleil connus, on peut
on
conclure pour chaque jour de l'année la longitude de cet astre, et une quantité proportionnelle à sa distance.



En effet, soit AB le grand axe de l'ellipse, F le foyer occupé par le centre de la Terre, S une position quelconque du Soleil à l'époque t, ce temps étant compté à partir du périgée A. — Soit r la distance, $SFA = v$. — Quant à la longitude que nous cherchons, elle est égale à $v + \varepsilon$, ε étant la longitude du périgée.

Je décris sur AB comme diam. une circonférence. Je mène l'ordonnée TSP, et je pose $TOA = u$. Les variables u et v sont deux variables auxiliaires, entre lesquelles et l il est facile d'établir une relation : et, comme elles peuvent s'exprimer facilement en fonction du temps, on voit que l sera en définitive exprimé en fonction du temps.

Remarquons d'abord que l'aire FAS est proportionnelle au temps, et si l'on appelle T la durée d'une année tropique, en divisant l'aire totale par T, on aura l'aire décrite par le Soleil dans l'unité de temps. Donc l'aire FAS sera égale à l'aire totale multipliée par la fraction $\frac{t}{T}$

$$FAS = E . \frac{t}{T} .$$

Mais $E = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$. Donc

$$FAS = \frac{\pi a^2 t}{T} \sqrt{1-e^2}$$

Les aires FTA, FSA sont dans le rapport du grand axe au petit. Donc

$$\text{air } FAT : \text{air } FSA :: a : a\sqrt{1-e^2}$$

$$FAT = \frac{\pi a^2 t}{T} \sqrt{1-e^2} \cdot \frac{a}{a\sqrt{1-e^2}}$$

$$FAT = \frac{\pi a^2 t}{T}$$

D'ailleurs l'aire OFT est celle d'un triangle. C'est la moitié du produit de deux côtés par le sinus de l'angle compris. Donc

$$OFT = \tfrac{1}{2} a \cdot ae \cdot \text{Sin} u = \frac{a^2}{2} e \,\text{Sin} u$$

Si, à l'aire OFT, on ajoute FTA, on aura l'aire du secteur circulaire OTA. ainsi

$$OTA \text{ ou } \tfrac{1}{2} a^2 u = \tfrac{1}{2} a^2 e \,\text{Sin} u + \frac{\pi a^2 t}{T}$$

D'où

$$u - e \,\text{Sin} u = \frac{2\pi t}{T} \qquad (\alpha)$$

C'est là l'équation qui existe entre u et t. or l'angle $\frac{2\pi t}{T}$ exprimerait la longitude du Soleil si elle croissait uniformément. En effet, puisque T est la durée de l'année tropique, pendant T, la longitude du Soleil augmente de 2π. Donc, si la longitude augmentait uniformément, elle croîtrait de $\frac{2\pi}{T}$ dans l'unité de temps, et par conséquent, de $\frac{2\pi t}{T}$ dans le temps t. – Par conséquent, si, à cet accroissement de longitude, on ajoute ε qui est la longitude du périgée, on aura ce qu'on appelle la longitude moyenne du Soleil, tandis que la longitude vraie est $v+\varepsilon$.

$\frac{2\pi}{T}$ est ce qu'on appelle le mouvement moyen de la longitude du Soleil. on le désigne habituellement par la lettre n. L'éq. précédente devient alors

$$u - e \,\text{Sin} u = nt$$

$nt + \varepsilon$ est la longitude moyenne.

La quantité $nt = \frac{2\pi t}{T}$ se nomme aussi anomalie moyenne, de sorte que si, à l'anomalie moyenne, on ajoute la longitude du périgée, on a la longitude moyenne.

L'angle u n'est pas égal à nt, puisque l'excentricité e n'est pas nulle. on l'appelle anomalie excentrique.

Enfin l'angle v s'appelle anomalie vraie. En sorte que la longitude vraie est égale à l'anomalie vraie augmentée de la longitude du périgée.

Je dis maintenant qu'il est facile d'avoir r et v en fonction d'u. – En effet, le rayon vecteur FS est une fonction rationnelle de l'abscisse

$$r = a - e \cdot OP$$

Mais

$$OP = OT \,\text{Cos} u = a \,\text{Cos} u$$

D'où

$$r = a(1 - e\cos u) \qquad (1)$$

Pour avoir maintenant v en fonction de u, il suffit de comparer cette valeur de r à celle qui est donnée par l'Equation polaire de l'Ellipse:

$$r = a\frac{1-e^2}{1+e\cos v}$$

on en tire

$$(1-e\cos u)(1+e\cos v) = 1-e^2$$

$$1 + e\cos v - e\cos u - e^2\cos u\cos v = 1-e^2$$

$$\cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}$$

D'où

$$1-\cos v = \frac{(1+e)(1-\cos u)}{1-e\cos u}$$

$$1+\cos v = \frac{(1-e)(1+\cos u)}{1-e\cos u}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{v}{2} = \frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-\cos u}{1+\cos u} = \frac{1+e}{1-e}\operatorname{tg}^2\frac{u}{2}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u \qquad (2)$$

Les formules (1) et (2) expriment r et v en fonction de u. — Mais, l'époque t étant donnée à partir de l'époque du passage au périgée, il sera facile de calculer nt, et l'Equation transcendante (2) donnera u. Par conséquent r et l seront donnés en fonction du temps.

Restera à indiquer comment on peut résoudre approximativement l'Equation (2) c.à.d.

$$u - e\sin u = nt. \qquad (2)$$

on en tire

$$u = nt + e\sin nt + \frac{e^2}{2}\sin.2nt.$$

La question que nous venons de résoudre s'appelle le Problème de Képler.

La différence entre l'anomalie vraie et l'anomalie moyenne, $v - nt$, ou, ce qui est la même chose, la différence entre la Longitude vraie et la Longitude moyenne est ce qu'on appelle l'Equation du Centre. L'origine de ce nom vient de ce qu'on avait d'abord supposé pour expliquer le mouvement du soleil que cet astre décrivait autour de la Terre un Cercle dont la Terre n'occupait pas le Centre, et l'on avait cherché quelle position il fallait donner à la Terre pour expliquer le mouvement du Soleil. Le mot Equation exprimait dans les anciens auteurs ce qu'il fallait ajouter à une valeur moyenne pour obtenir la valeur exacte. De là le nom précédent.

Si l'on développe l'Equation du Centre suivant les puissances de l'excentricité, on trouve

$$v - nt = 2e\sin nt + \frac{5e^2}{4}\sin 2nt + \dots$$

Cette Equation du Centre est s'annule au périgée et à l'apogée; car

alors $nt = 0$ ou $nt = \pi,\ 2\pi, \dots$ et par suite $\sin nt$ et $\sin 2nt = 0$.

Elle acquiert son maximum entre le Périgée et l'apogée ; est positive quand le Soleil va du périgée à l'apogée : ainsi, dans cette portion du mouvement, la Longitude vraie est plus petite que la Longitude moyenne. Au contraire, quand le ☉ va de l'apogée au Périgée, l'Equation du centre est négative, et par conséquent la Longitude vraie est supérieure à la Longitude moyenne. Ceci se conçoit assez bien. En effet, au périgée, le Soleil a sa vitesse maximum, tandis qu'elle est minimum à l'apogée. Donc, du Périgée à l'apogée, il doit être en avance sur un Soleil fictif moyen qui parcourrait uniformément l'écliptique, tandis que de l'apogée au périgée, il doit être en retard.

Pour avoir le maximum de l'Eq. du centre, il faut égaler à zéro sa dérivée

$$0 = 2en\cos nt + \frac{5e^2n}{2}\cos 2nt + \dots$$

Cette équation peut se résoudre par approximation, et l'on en conclura l'époque à laquelle le maximum a lieu. Portant ensuite cette valeur de t dans l'Equation du centre, on a le maximum de cette Equation exprimé en fonction de l'excentricité, c.à.d. une relation entre l'excentricité et le maximum de l'Equation du centre. — Donc, si l'on connaît l'une ou l'autre de ces deux quantités, la seconde peut s'en déduire, et c'est même là le moyen le plus précis de déterminer l'excentricité.

Il faut pour cela trouver par l'observation le maximum de l'Equation du centre, et la chose est facile. En effet, connaissant l'époque du passage du Soleil au périgée, et la durée de l'année, nous pourrons assigner pour chaque jour la Longitude moyenne du Soleil, c.à.d. celle qu'aurait cet astre si sa Longitude croissait proportionnellement au temps. Par l'observation directe, nous déterminerons pour chaque jour sa Longitude vraie : prenant la différence de ces deux Longitudes pour chaque jour de l'année, il sera facile de faire des Tables de ces différences, et d'avoir pour chaque jour de l'année le Maximum de l'Equation du centre. — D'où la détermination de l'excentricité.

Différentes Espèces de Jours. — Jour moyen.

On appelle **Jour vrai** l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages du Soleil au méridien.

Il suit de cette définition que les Jours vrais ne sont pas égaux entre eux, et qu'il n'est pas possible par conséquent de les prendre pour Unité. — En effet, pour qu'ils fussent égaux, il faudrait que l'ascension droite du Soleil augmentât de quantités égales en des temps égaux, ou, en d'autres termes, que la projection du Soleil sur l'Equateur eût un mouvement uniforme. Mais il y a deux raisons qui s'y opposent. — C'est évident.

Voici maintenant la définition que les astronomes ont adoptée pour le jour moyen.

Concevez un premier soleil fictif qui part du périgée en même temps que le soleil vrai, et qui décrit l'écliptique uniformément dans l'espace d'une année tropique (ne serait-ce pas d'une année anomalistique ? raz.) Concevez ensuite un second soleil fictif qui se trouverait à l'équinoxe du printemps en même temps que le précédent, et qui décrirait l'équateur uniformément dans le même intervalle de temps. Ce second soleil fictif est ce qu'on appelle le Soleil moyen, et l'intervalle de deux passages du ☉ moyen au méridien est appelé jour moyen.

Il est facile de déterminer le rapport du jour moyen au jour sidéral. En effet, appelons S la durée du jour sidéral, et m la durée du jour moyen, toutes les deux étant exprimées au moyen d'une unité de temps quelconque. Soit A la durée de l'année tropique en jours sidéraux. alors

$$A = 366,242264 . S.$$

Pendant l'année tropique, la longitude du soleil augmente de 360° ou de 2π. Donc dans le temps 1, elle aura seulement crû de $\frac{2\pi}{A}$, et dans un jour moyen, de $\frac{2\pi m}{A}$. De là il suit que si, au commencement d'un jour moyen, le soleil coïncidait avec une certaine étoile, à la fin de ce jour, il ne coïncidera plus avec cette étoile, et aura avec elle une différence de longitude qui sera précisément $\frac{2\pi m}{A}$. Donc, quand le soleil revient au méridien, l'étoile l'a déjà dépassé de $\frac{2\pi m}{A}$. - or, combien de temps a-t-il fallu pour cela ? - L'étoile décrit 2π en un jour sidéral S. Elle décrit l'angle 1 en $\frac{S}{2\pi}$, et l'angle $\frac{2\pi m}{A}$ dans le temps $\frac{mS}{A}$. Donc le jour moyen se compose d'un jour sidéral $+ \frac{mS}{A}$, et l'on a l'équation

$$m = S + \frac{mS}{A}$$

$$m = \frac{AS}{A-S} = \frac{\frac{A}{S}}{\frac{A}{S}-1} S. \qquad A = 366,242264\ S$$

Par conséquent

$$m = \frac{366,242264}{365,242264} . S$$

et réciproquement

$$S = \frac{365,242264}{366,242264}\ m.$$

Si l'on prend le jour moyen pour unité, de sorte que

$$m = 86400''$$

on trouve en faisant le calcul

$$S = 86164''$$

et les jours, minutes, secondes, doivent être considérés comme division du jour moyen.

$$m - S = 236'' = 3' 56''$$

Si l'on veut avoir l'expression de l'année en jours moyens, il suffit, à la place de S, dans l'expression

$$A = 366,242264 . S$$

de mettre sa valeur en fonction de m. alors $A = 365,242264 . m.$

Elle est inférieure d'une unité à l'expression de l'année en jours sidéraux.

Les astronomes prennent le jour moyen pour unité de temps. Il l'ont divisé en 24^h, chaque heure en 60^m, et chaque minute en 60^s.

On peut d'après les formules qui précèdent chercher la durée du jour sidéral au moyen de ces unités, et l'on trouve que le jour sidéral est composé de $23^h\ 56^m\ 4^s$, ou 86164^s : en d'autres termes, le jour sidéral est égal au jour moyen diminué de $3^m 56^s$ ou de 236^s.

On trouve ainsi que l'année tropique se compose de $365^{j.}\ 5^h\ 48^m\ 51^s,6$. C'est là l'année tropique moyenne, en considérant seulement l'équinoxe moyen: car nous avons vu que ce point équinoxial se déplaçait d'abord à cause de la précession, et puis à cause des nutations ; et nous entendons par équinoxe moyen le point fictif qu'il occuperait si les nutations n'existaient pas, et si l'axe de la terre décrivait tout simplement un cône autour de celui de l'écliptique.

Il est facile de trouver la durée des autres années que nous avons distinguées.

On a pour l'année sidérale $365^{j.m.}\ 6^h.\ 9^m\ 11^s,5$.

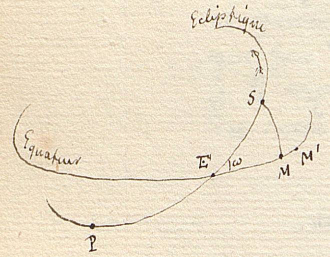
Il est facile de trouver aussi le mouvement angulaire moyen du ☉, que nous avons désigné par $\underline{n}$.

$$n = \frac{2\pi}{T} = \frac{360°}{365^{j.m},242264} = 0°\ 59'\ 8'',3.$$

l'unité étant le jour moyen. — $\underline{n}$ changerait évidemment avec l'unité.

Midi vrai. — Midi moyen.

L'intervalle de temps qui s'écoule entre les deux s'appelle Equation du temps. Il est facile de la calculer pour chaque jour. Figurons sur la sphère céleste l'écliptique, l'équateur, et l'équinoxe du printemps. Soit P le périgée. Soit α l'arc EP qui est connu : car c'est 360° — la longitude du périgée, les longitudes se comptant dans le sens du mouvement du ☉.



EP = α
EM = φ
PS = θ

Considérons le ☉ en S à une époque qcq. $\underline{t}$, que je suppose comptée à partir du passage du ☉ au périgée. Si nous menons par le point S l'arc de grand cercle SM perp. à l'équateur, EM sera l'ascension droite du ☉ pour ce jour-là : je l'appelle φ : et PS sera la longitude à partir du périgée, que je désignerai par θ. — Il est facile de calculer θ pour l'époque t : car on a

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ \operatorname{tg}\frac{u}{2}$$

l'angle u étant donné par l'équation

$$u - e \sin u = nt.$$

Ayant θ, on en retranche α, et l'on obtient SE. Ayant SE, j'en déduis l'AR. Car le triangle rectangle ESM donne

$$\operatorname{tg} EM = \operatorname{tg} ES . \cos SEM$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\theta - \alpha) \cos\omega.$$

ainsi φ est une fonction connue de t. c'est l'AR du ☉ vrai à l'époque t.
D'un autre côté, il n'est pas difficile d'avoir l'AR du ☉ moyen. Soit M' pour la même époque t la position du ☉ fictif sur l'Equateur. Soit $EM' = \varphi_1$. — observons que le premier Soleil fictif est parti du Périgée en même temps que le ☉ vrai, et il est aisé de trouver à quelle époque il est arrivé à l'Equinoxe E. Puisque son mouvement est uniforme, pour décrire α, cet astre emploiera un temps t' donné par la proportion

$$t' : T :: \alpha : 2\pi$$

$$t' = \frac{\alpha T}{2\pi} = \frac{\alpha}{n}$$

Maintenant, au moment où il passe à l'Equinoxe, le Soleil moyen en part aussi pour parcourir l'Equateur, et il le parcourt pendant un temps $t - \frac{\alpha}{n}$. Par conséquent, il décrira un arc $EM' = n\left(t - \frac{\alpha}{n}\right)$. Donc

$$\varphi_1 = nt - \alpha$$

Maintenant, soit τ l'heure du premier passage du Soleil moyen au méridien après son passage à l'Equinoxe. Pour $t = \tau$, il est midi moyen. Maintenant, faites $t = \tau + 1$, $t = \tau + 2$, $t = \tau + 3$, l'unité de temps étant le jour moyen, vous aurez les époques des midis moyens successifs dans le courant de l'année, et, en calculant pour ces époques les valeurs de φ et de φ_1, vous aurez pour chaque jour de l'année l'AR du ☉ vrai et celle du ☉ moyen, et par conséquent MM' qui est la différence. Si vous réduisez cette différence en temps à raison de 15° pour une heure sidérale, vous aurez l'Equation du Temps.

Par cette méthode, qui est celle des astronomes, on trouve que le temps moyen avance sur le temps vrai du 24 9bre au 12 avril; il retarde du 12 avril au 15 juin, avance de nouveau jusqu'au 1er 7bre, et enfin retarde jusqu'au 24 9bre. L'époque du retard maximum est le 2 Novembre, où il est de 16' 16",2. L'avance maxima est de 14' 32",4, au 11 février. — Une horloge bien réglée n'est donc d'accord avec le ☉ que 4 jours par an, et la différence peut aller jusqu'à 1/4 d'heure.

Gnomon.
Cadrans Solaires.

Année Civile. — Calendrier.

On a distingué jusqu'ici plusieurs sortes d'années. On emploie encore l'année Civile, qui doit satisfaire à ces deux conditions :
1°. Ne contenir qu'un nombre entier de jours.
2°. Avoir une durée variable telle que, si l'on embrasse un grand intervalle

de temps, la moyenne des années civiles soit égale à l'année tropique.

C'est en effet sur l'année tropique qu'il est utile de régler l'année civile. Car le partage des saisons dépend du passage du ☉ à l'équinoxe, et il faut qu'une même époque de l'année réponde toujours aux mêmes saisons.

L'ensemble des règles qui servent à fixer l'année civile forme ce qu'on appelle le Calendrier.

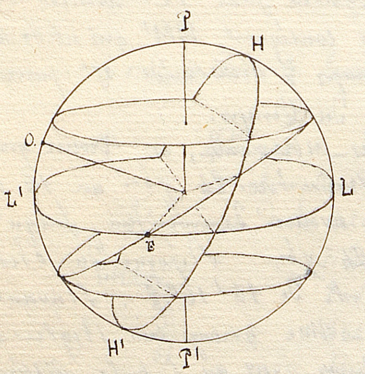
À mesure que l'astronomie s'est perfectionnée, il en a été de même du Calendrier.

Egyptien. – année vague de 365 jours. – 1460 ans.

Calendrier Julien.

Réforme Grégorienne. (Faye.)

Nous allons examiner comment, par la seule marche du ☉, la chaleur et la lumière se distribuent à la surface de la Terre, et comment il en résulte des différences dans la longueur des jours et des nuits et dans la périodicité des saisons.



Soit la sphère céleste, PP' la ligne des pôles, EE' l'équateur. – Considérons un observateur placé sur l'équateur terrestre. Comme la Terre n'est qu'un point par rapport aux dimensions de la sphère céleste, on peut dire que le plan de l'horizon est parallèle à un plan passant par PP'. Or dans un jour, le Soleil décrira un parallèle qui est tantôt au sud, tantôt au nord: par conséquent, le plan de l'horizon qui passe par PP' le divisera en deux parties égales, et, pour l'observateur, le jour sera égal à la nuit: c.à.d. que le temps pendant lequel le Soleil sera au-dessous de l'horizon égalera le temps pendant lequel il est au-dessus. – Si l'observateur s'éloigne de l'équateur, le plan tangent n'est plus parallèle à PP', et si nous imaginons qu'on le prolonge jusqu'à la sphère céleste, HH' sera sa trace sur cette sphère. – Lorsque le Soleil décrira l'équateur, ce qui arrivera aux deux équinoxes, HH' divisera en deux parties égales le grand cercle décrit par le Soleil dans l'espace d'un jour, et, à cette époque-là seulement, le jour sera égal à la nuit. Car pour les autres époques, il n'en sera pas de même, puisque le plan de l'horizon divise en deux parties inégales les parallèles décrits par le Soleil. – Il est facile de voir qu'à partir de l'équinoxe du printemps, le jour sera plus long que la nuit, et ira en augmentant toujours jusqu'au solstice d'été. Le Soleil, après avoir dépassé le solstice, reste de plus en plus longtemps au-dessous de l'horizon, et le jour redevient égal à la nuit quand le Soleil arrive à l'équinoxe d'automne: alors le Soleil passe de l'autre côté de l'équateur. La partie du parallèle décrit par le Soleil qui est au-dessus de l'horizon diminue toujours jusqu'au solstice d'hiver, et augmente ensuite jusqu'à l'équinoxe du printemps.

Définition des Tropiques du Cancer et du Capricorne.

Nous avons supposé que HH', c'est-à-dire l'horizon de l'observateur, coupait tous les parallèles que le Soleil décrit dans le cours d'une année. Mais cela n'a pas nécessairement lieu. — on sait en effet que le Soleil ne s'élève qu'à 23° 28' au-dessus du plan de l'Équateur. Si donc un observateur est placé de telle façon que son horizon fasse avec le plan de l'Équateur un angle moindre que 23° 28', dès que le Soleil sera au-dessus du point h', il restera constamment visible pour l'observateur. Au contraire, quand il sera encore au-dessous du point h, il ne le sera plus du tout, en sorte que, en ce point de la Terre, on aura pendant une certaine époque de l'année d'abord des jours égaux aux nuits, puis des jours croissant indéfiniment jusqu'à devenir égaux à 24h. ; des nuits très-courtes viennent ensuite, elles vont en croissant, bientôt sont égales aux jours, les dépassent : ceux-ci s'annulent, et l'on a une nuit complète ; puis reviennent des jours de courte durée, etc.

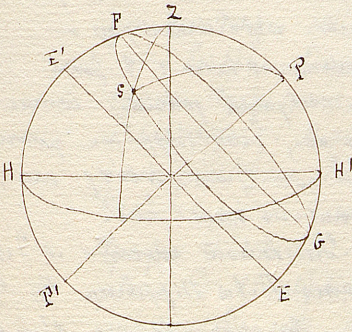
Pour que ce phénomène s'observe, il faut qu'on soit à une distance du Pôle inférieure à 23° 28'. Les points pour lesquels $90° - \lambda = 23° 28'$ sont situés sur un petit cercle qu'on appelle Cercle Polaire arctique. Tous les points de ce petit cercle ont un jour de 24h. et une nuit de 24h. par année. Tous les points situés plus au N. ne observe ce que nous avons décrit tout-à-l'heure. Enfin, au pôle lui-même, on a 6 mois de jour et 6 mois de nuit.

Dans l'autre hémisphère, on a le Cercle Polaire antarctique.

Problème.

Déterminer la durée du jour pour une latitude donnée, et à une époque donnée.

Soit P le pôle, HH' l'horizon de l'observateur, dont le zénith est en Z, FG le parallèle décrit par le ☉ à l'époque que l'on considère. On a



$$FP = 90° - \delta$$

δ étant la déclinaison, supposée connue. — Désignons par t le temps compté à partir de midi, en prenant le jour pour unité, et cherchons la distance zénithale z du ☉ à un moment qcq. du jour. t est exprimé en fraction de jour.

Soit S la position du ☉. Menons l'arc de grand cercle SZ. L'angle $SPZ = 2\pi t$, et le triangle sphérique ZPS donne

$$\cos ZS = \cos ZP \cos PS + \sin ZP \sin PS \cos ZPS$$

or $PS = PF = 90° - \delta$. $ZP = 90° - \lambda$. Donc

$$\cos z = \sin\lambda \sin\delta + \cos\lambda \cos\delta \cos 2\pi t$$

En faisant $t = 1^h$, $t = 2^h$, .. on aura la distance zénithale du ☉ à un moment qcq. du jour. — Pour avoir la durée du jour, il faut faire $z = 90°$, et l'on a

$$\cos 2\pi t = -\frac{\sin\lambda \sin\delta}{\cos\lambda \cos\delta} = -\operatorname{Tg}\lambda \operatorname{tg}\delta$$

ce qui donne l'heure t du coucher du ☉, et par suite celle du lever. $2t$ sera la durée du jour, et $1 - 2t$ celle de la nuit pour l'époque donnée.

On en conclut aussi la durée du crépuscule. — Nous avons vu en effet que les rayons du ☉ nous éclairent tant qu'il n'est pas à plus de 18° au-dessous de l'horizon. Il faut donc faire dans cette formule $z = 90 + 18$ et l'on aura la durée du crépuscule et celle de l'aurore. — Si la somme de ces deux durées est égale ou supérieure à celle de la nuit, le crépuscule rejoint l'aurore, et il n'y a pas de nuit à proprement parler. Cela a lieu à Paris, et il est facile de voir en quels lieux cela arrive. — Supposons que le parallèle FG soit celui du Solstice, on peut alors calculer l'arc HG dont le Soleil s'abaisse au-dessous de l'horizon. On a

$$HG = 90° - \lambda - \omega$$

car alors $GE = \omega$. Et si GH est $< 18°$, il n'y a pas de nuit proprement dite. Cela donne

$$90° - \lambda - \omega < 18°$$

$$\lambda > 90° - 18° - \omega$$

$$\lambda > 48° \tfrac{1}{2}$$

En effet, à Paris, λ est un peu plus grand que 48° ½. Cette circonstance se présentera donc pour tous les points de la Terre dont la latitude est plus grande que cette limite, environ 48° ½.

Au lieu de supposer que le ☉ tourne autour de la Terre, il est plus naturel de supposer que celle-ci tourne autour du ☉, et quand nous étudierons les planètes, nous verrons que c'est indubitable.

Explication des Saisons dans cette hypothèse.

(Camiot, p. 231 et suiv. et autres).

Nous dirons seulement que les quatre Saisons n'ont pas même durée, car les aires des 4 secteurs sont différentes. Actuellement, on a

Printemps + Été = automne + hiver + 8 jours.

Mais cette inégalité n'a lieu que pour l'époque présente. Comme la ligne des apsides se déplace de 61",9 par an, cette différence pourra devenir nulle, et même négative. On a calculé que dans 4685 ans, on aura

Print. + Été = aut. + hiver.

Cette différence entre les durées des Saisons chaudes et des Saisons froides est probablement une des causes de la différence de température moyenne entre les deux hémisphères. — En outre, il y a l'inégale distribution des continents et des mers.

Signes du Zodiaque.

Distinction des Signes et des Constellations correspondantes.

Nous avons jusqu'à présent déterminé la nature de la courbe décrite par le ☉ (en admettant toujours l'ancien système). Nous allons en chercher les dimensions réelles.

Pour cela, il faut déterminer la parallaxe horizontale du Soleil. Car on sait que $P = \frac{r}{d}$ et $d = \frac{r}{P}$ (r = rayon terrestre).

La méthode que nous avons indiquée pour trouver les parallaxes n'est pas assez exacte quand il s'agit du ☉. On se sert des passages de Vénus sur le disque du ☉. On a trouvé ainsi 8",6 pour la parallaxe moyenne, et par conséquent

$$D = 24025\ r.$$

On conçoit qu'une erreur sur la parallaxe entraîne une grande différence dans les résultats. Ainsi une erreur de 1/10 de seconde équivaut à 1/80 de la parallaxe, et produit une de 300 rayons terrestres.

C'est là le demi-grand axe de l'ellipse solaire. On connaît d'ailleurs l'excentricité e. On en déduit aisément la distance de la Terre au centre de l'ellipse

$$CT = 404\ r.$$

Maintenant, on peut avoir le diam. du ☉. — Il est de 112 r. Le rapport des surfaces est 12000 et celui des volumes 1400000.

Voyons enfin ce que l'observation de la surface du ☉ va nous apprendre sur sa constitution.

Taches : — Zone de 60° de largeur.

Facules.

Lucules (parties pointillées).

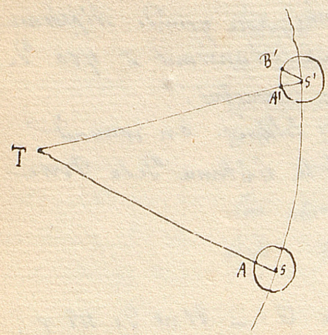
Les taches ne restent pas immobiles, et, indépendamment des déformations qui leur sont propres, elles ont un mouvement commun qui indique que le Soleil tourne sur lui-même autour d'un axe incliné un peu sur l'écliptique. — Cette rotation se fait dans le sens même du mouvement du ☉ autour de la Terre, c.à.d. de droite à gauche, de sorte que les taches visibles se meuvent de notre gauche à notre droite.

Si l'axe de rotation du ☉ était exactement perp. à l'écliptique, chaque tache nous paraîtrait décrire une ligne droite parallèle à l'écliptique. Mais il n'en est pas tout-à-fait ainsi. Si l'on construit jour par jour la trajectoire d'une tache, on ne trouve pas une droite, mais une courbe ovale. Elle ne devient droite qu'à deux époques de l'année, lorsque la trace de l'équateur solaire sur le plan de l'écliptique vient passer par le centre de la Terre. Alors l'inclinaison de cette droite sur le plan de l'écliptique donne précisément celle de l'équateur solaire sur l'écliptique. Elle est égale à 7° 30', et par suite, l'axe de rotation du ☉ fait avec l'écliptique un angle de 82° 30'. — Les époques auxquelles les taches décrivent des droites sont l'une, lorsque la longitude du ☉ est de 80° 7' (11 Juin) et l'autre, lorsqu'elle est 260° 7' (12 Décembre). — Plus tard, ces époques seront différentes, à cause de la précession des équinoxes.

Ces résultats ne peuvent se conclure que d'un ensemble d'observations faites sur un grand nombre de taches, puisque chacune disparaît graduellement en se déformant, et qu'on ne la peut suivre plus de six semaines.

Nous avons à parler maintenant de la durée de la rotation.

Une tache, en moyenne, vient reprendre la même position au bout de 27j,3. – Mais ce n'est pas là au juste la durée de la rotation du ☉. En effet, la Terre a tourné en même temps que le Soleil. – Soit pour plus de simplicité le système de Ptolémée, T la Terre fixe,



S et S' deux positions du ☉ pour lesquelles une tache A a le même aspect en A et en A'. Si l'on mène S'B' parallèle à SA, le Soleil a décrit $2\pi + A'B'$. or

$B'S'A' = STS' =$ accroissement de longitude du ☉

et comme, dans l'espace de temps $T = 365^j,242264$ la longitude du ☉ augmente de 2π, dans un jour, elle augmentera de $\frac{2\pi}{T}$, et dans $27^j,3$, de $\frac{2\pi . 27,3}{T}$. Donc le Soleil a tourné de

$$2\pi \left\{ 1 + \frac{27,3}{T} \right\}$$

Donc, pour qu'il tourne de 2π, il faut

$$\frac{27,3}{1 + \frac{27,3}{T}} = 25^j,4$$

Telle est donc la durée d'une révolution du ☉ sur lui-même.

Constitution physique.
Hypothèse d'Herschell.
Polariscope d'Arago (Briot).

Lumière zodiacale (id.)

De la Lune.

Comme pour le Soleil, on peut déterminer jour par jour l'Æ et la Déclin. de la Lune.

Cette détermination exige cependant quelques précautions particulières parce que nous ne voyons souvent qu'une partie du disque de la Lune.

Il faut ensuite trouver le diamètre apparent de cet astre, ce qui est possible, puisque la portion du disque de la Lune qui est visible comprend toujours une demi-circonférence. — On peut donc toujours tracer dans la partie visible de l'astre un diamètre qui y soit compris tout entier, et c'est la grandeur de ce diamètre qu'il faut mesurer. On y parvient à l'aide d'un micromètre formé de deux fils parallèles qu'on peut rapprocher à volonté, jusqu'à ce que le diam. soit compris entre ces deux fils. Pour déterminer l'angle correspondant, il suffit d'examiner combien de temps une étoile met à passer d'un fil à l'autre, et de réduire ce temps en degrés à raison de 15° à l'heure.

Nous reviendrons plus tard sur la valeur variable de ce diamètre.

Connaissant les Décl. et l'Æ de la Lune, on en conclut sa Longitude et sa Latitude, et l'on reconnaît qu'elles varient comme celles du Soleil, mais beaucoup plus rapidement. Ainsi la Longitude augmente chaque jour de 13° environ, par conséquent, au bout d'un nombre de jours assez petit, la Lune aura repris la même position par rapport aux Equinoxes.

(Rem. Si la Lune passe aujourd'hui au méridien en même temps qu'une Etoile, demain elle y passera 50' plus tard).

C'est ce nombre de jours qui est la durée de la Révolution tropique de la Lune. — Elle est de

$$\frac{360°}{13°\,10'} = 27^{\text{jours}},321255 = 27^{j}\,7^{h}\,21^{m}\,4^{s},7$$

Cette durée ne se rapporte qu'à l'époque actuelle. Elle variera dans les siècles à venir.

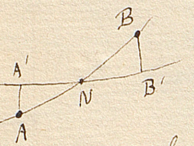
Quant à la Latitude de la Lune, on la voit aussi changer. Elle est Boréale pendant une demi-révolution, et australe pendant le reste.

En construisant sur un globe ces diverses positions que la Lune occupe sur la Sphère céleste, on trouve qu'elles sont sur un grand cercle dont l'inclinaison sur l'écliptique est 5° 8' 28" et l'on comprend tout de suite alors pourquoi la Latitude change de sens.

L'intersection de ce grand cercle avec l'écliptique porte le nom de Ligne des nœuds, et l'on indique le Nœud ascendant et le Nœud

descendant le premier par le signe ☊, le 2^{d} par ☋.

On observe la position des nœuds de la Lune en déterminant la Longitude et la Latitude de la Lune dans le voisinage de ces points, un peu avant, lorsque la Latitude est australe, et un peu après lorsqu'elle est Boréale. — Soient λ et l la Lat. et la Longitude de A, λ' et l' celles de B. Les deux triangles ANA', BNB' donnent



$$\lambda : \lambda' :: l_1 - l : l' - l_1$$

l_1 désignant la Longitude du Nœud N. D'où l'on tire l_1 qui est la longitude du Nœud ascendant.

L'inclinaison de l'orbite se déduit des mêmes observations. Car, dans le triangle AA'N, on a

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\lambda}{l_1 - l}$$

On ne peut admettre qu'en se bornant à une approximation assez grossière que la Lune décrit un grand cercle incliné sur l'écliptique. Car si l'on détermine la Longitude du Nœud ascendant et celle du nœud descendant, on ne trouve pas que ces Longitudes diffèrent de 180°. La différence est inférieure à 180°. — Cela peut s'expliquer en admettant que la Lune décrit une orbite plane dont le plan se déplace, en sorte que les nœuds aillent en rétrogradant. Cette Rétrogradation des nœuds est assez rapide, puisque, dans une année, la Longitude du Nœud ascendant a diminué de 19° 19' 43". Par conséquent, ils feront une Révolution complète en 18 ans 1/2.

En même temps que les nœuds changent, l'inclinaison du plan de l'orbite change également, et peut varier de 9' en plus et en moins.

De plus, le mouvement de la Lune dans son orbite n'est pas Uniforme.

La Lune ayant un mouvement propre bien plus rapide que celui du Soleil, ne se trouve pas constamment placée de la même manière par Rapport au Soleil. De là les phases de la Lune, c.à.d. les diverses apparences qu'elle présente.

Etudions donc le

Mouvement de la Lune par Rapport au Soleil.

La Lune avance actuellement de 13° 10' par jour sur la Sphère Céleste, le Soleil, de 59'. Par conséquent, la Lune avance par Rapport au Soleil de

$$12^{\circ}\ 11'$$

et, pour qu'elle reprenne la même position en Longitude par Rapport au Soleil, il faut une durée marquée par

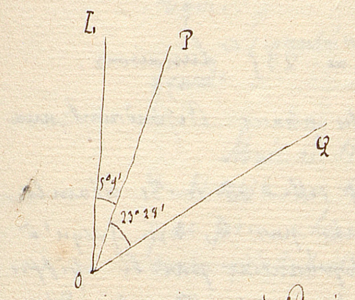
$$\frac{360^{\circ}}{12^{\circ},11'} = 29^{j},53059 = 29^{j}\ 12^{h}\ 44^{m}\ 3^{s}$$

c'est ce qu'on appelle Révolution Synodique.

Elle a une durée plus grande que celle d'une Révolution Tropique, et la Raison en est claire : puisque le Soleil marche de son côté : il faudra un temps plus long pour que la Lune reprenne par Rapport à cet astre la même position. — Après une pareille Révolution, la Lune écartent du Soleil la même quantité de

lumière, son apparence d'éclat doit être la même.

L'orbite de la Lune conserve toujours à peu près la même inclinaison sur le plan de l'Ecliptique : cet angle est de 5° 9'. Mais elle fait avec l'Equateur un angle variable. Car si par le centre de la Terre on mène trois perpendiculaires, OP à l'Ecliptique, OQ à l'Equateur, OL à l'orbite de la Lune, on peut regarder OP et OQ comme fixes, et QOP comme invariable pendant quelque temps. Mais OL décrit autour de OP un cône de l'angle de 5° 9'. et l'angle de OL avec OQ sera maximum et minimum quand OL sera dans le plan POQ.



Le maximum = 29° 37'

Le minimum = 18° 19'

L'angle varie entre ces deux limites.

A Paris, la Lune peut donc s'approcher et s'éloigner du Zénith plus que le Soleil. — C'est en été que la Lune est le plus près du Zénith, et en hiver qu'elle en est le plus loin.

Si l'on veut avoir la durée après laquelle le noeud occupe la même position par rapport au Soleil, il n'y a qu'à remarquer que le Noeud et le Soleil vont en sens contraire. — Soit E le plan de l'Ecliptique, S le soleil.



Supposons que le soleil et le noeud ascendant coïncident en S. Le Soleil va marcher dans le sens de la flèche, le noeud va rétrograder en sens contraire, par suite il leur faudra moins d'une année pour revenir en coïncidence.

On trouve qu'il leur faut 346j,619

C'est la durée d'une Révolution Synodique du Noeud.

On appelle Phases de la Lune les divers aspects qu'elle nous présente selon sa position par rapport au Soleil.

On dit qu'elle est en Conjonction quand sa longitude est la même que celle du Soleil ; en Opposition quand la différence des longitudes est 180° ; et en Quadrature quand elle est de 90° ou 270°. Quand la différence est $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{8}$ de 2π, on a des positions appelées les Octants.

Les oppositions et conjonctions portent le nom de Syzygies.

Détails. — Pourquoi il n'y a pas toujours éclipse.

Heures du lever et du coucher de la Lune à ses différentes phases.

Lumière cendrée. — Phases de la Terre.

Il existe un Rapport remarquable entre la Révolution Synodique de la Lune et celle du Noeud.

223 Lunaisons = 19 Révolutions Synod. du Noeud = 18 ans 10 jours

C'est ce qu'on calculera facilement au moyen des fractions continues.

Il en résulte qu'au bout de 18 ans, la Lune reprend la même position par rapport au Soleil, et aussi par rapport à son nœud, et par suite, les éclipses doivent se reproduire dans le même ordre. Détails.—

On peut encore chercher au bout de combien de temps les phases de la Lune répondront aux mêmes jours de l'année. — Il s'agit de trouver un nombre entier de lunaisons équivalent à un nombre entier d'années tropiques. On trouve ainsi que

19 années tropiques = 235 lunaisons.

Donc au bout de 19 années tropiques, les phases répondront aux mêmes jours de l'année.

On désigne par 1 l'année qui suit celle où le 31 Décembre était jour de nouvelle Lune, puis les suivantes par 2, 3, .. jusqu'à 19. Alors l'année 20 peut être de nouveau représentée par le chiffre 1. Le nombre qui correspond ainsi à une année est le Nombre d'or.

Ayant le nombre d'or d'une année, on peut calculer l'époque des phases.

On appelle Epacte d'une année le nombre de jours compris entre la dernière nouvelle Lune de l'année précédente et le 1er. Janvier. — Quand le nombre d'or est 1, l'épacte est 1, et elles se reproduisent au bout de 19 ans. — À chaque nombre d'or répond une épacte déterminée.

Ces nombres ont eu bien plus d'importance qu'ils n'en ont maintenant.

Le mouvement de la Lune sert de base au Calendrier ecclésiastique (Faye) et sert à fixer la date des fêtes mobiles.

Les variations des distances de la Terre à la Lune sont données par le diamètre apparent, dont

le maximum est de 33' 30"
le minimum " 29' 30" } ☾

On voit que ces variations sont plus grandes que pour le Soleil, pour lequel

le maximum est de 32' 35",6
le Minimum " 31' 31" } ☉

Le diamètre apparent de la Lune va en augmentant ou en diminuant dans chaque demi-révolution, et il en est de même de la distance de la Lune depuis le périgée jusqu'à l'apogée.

Quand on se borne à une révolution, le périgée et l'apogée sont sensiblement sur une même droite passant par le centre de la Terre, et qu'on appelle Ligne des apsides.

Si l'on construit ainsi la courbe que décrit la Lune, on trouve une Ellipse dont la Terre occupe un foyer, et les aires décrites par le rayon vecteur croissant proportionnellement au temps, de sorte qu'on pourrait calculer la position de la Lune pour chaque instant à l'aide des formules

$$\begin{cases} nt = u - e \sin u \\ r = a(1 - e \cos u) \\ \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2} \end{cases}$$

et l'on calculera la longitude par un calcul de trigonométrie sphérique.

L'excentricité e s'obtient comme pour le Soleil. Elle est 2 fois plus grande

$$e = 0,0635.$$

Mais si l'on embrasse plusieurs révolutions, on voit que le plan de l'orbite se déplace continuellement, et en outre que cette ellipse n'est pas fixe. La ligne des apsides tourne de 40° 40$^{min.}$ par an, en sorte qu'elle fait une révolution en

$$3232^j,57$$

c'est un peu moins de 9 ans.

En rapprochant toutes ces circonstances, on peut se faire une idée du mouvement de la lune.

1°. Rétrogradation de la ligne des nœuds, c.a.d. du plan de l'orbite;

2°. Inclinaison variable entre des limites assez restreintes;

3°. Ellipse se mouvant dans son plan.

En outre, l'ellipse n'est pas décrite d'un mouvement uniforme. Il y a donc une équation du centre qui va jusqu'à 6°, et qui dépend uniquement de la position de l'astre dans son orbite.

Il y a encore une autre inégalité qu'on nomme Evection et qui a été découverte par Ptolémée. Elle consiste en ce que, pour obtenir la longitude, après toutes les corrections précédentes, il faut encore ajouter une quantité exprimée par

$$\text{Evection} = 1° 18' \sin. \{2(☾ - ☉) - \theta\}$$

les signes indiquant la différence de longitude entre la lune et le soleil.

On voit facilement que l'Evection diminue l'équation du centre dans les syzygies, et l'allonge dans les quadratures. En effet, dans les syzygies, $2(☾ - ☉) = 0$ ou 180° et l'Evection est $-1° 18' \sin\theta$, de sorte que l'évection est additive quand $\sin\theta$ est < 0, et vice versa. Or, quand l'astre va du périgée à l'apogée, $\sin\theta$ est > 0 et $\theta - nt > 0$. Donc, dans les syzygies, l'évection est toujours de signe contraire à l'équation du centre. — C'est le contraire dans les quadratures. En effet, on a alors $☾ - ☉ = \pm 90°$, $2(☾ - ☉) = \pm 180°$. L'évection sera donc $1° 18' \sin\theta$, et par conséquent additive.

L'inégalité la plus considérable après celle-là s'appelle Variation, et a été découverte par Tycho-Brahé. Elle est

$$\text{Variation} = (33' 42'') \sin 2(☾ - ☉)$$

on voit qu'elle est nulle aux syzygies et aux quadratures, mais que c'est aux

écart qu'elle a son maximum.

Une nouvelle inégalité est l'Equation annuelle. Elle a pour valeur

$$\text{Eq. annuelle} = -17'12'' \sin(\text{anom. moy. du} \odot)$$

Voilà pour les variations en Longitude.

Mais la Lune a encore des variations en Latitude.

La plus importante résulte des variations de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique. Elle s'indique par

$$-9' \cos 2(\odot - \Omega)$$

Dans toutes ces expressions, le coefficient du Sinus ou du Cosinus s'appelle le Coefficient, et l'angle, l'argument de l'inégalité.

Ces inégalités sont d'ailleurs périodiques, et n'affectent pas le mouvement moyen de la Lune.

Mais il y a une autre inégalité qui a une période tellement longue qu'elle ne paraît pas périodique, et ne pourra guère se ralentir que dans 24000 ans. Elle affecte la longitude moyenne de la Lune; on trouve que, pour représenter la Longitude, il faut prendre la formule $a + bt + ct^2$, et si l'on prend pour unité de temps le siècle, on a $c = 10'',2$. Il en résulte que si l'on cherchait la position de la Lune il y a 25 siècles en lui supposant le mouvement qu'elle a actuellement, on se tromperait de $ct^2 = 10'',2 \times 625$ ou $1° 46'$; et comme, pour parcourir cet arc, il faut $3^h 13^m$, si l'on cherche l'heure à laquelle a dû avoir lieu une éclipse il y a 25 siècles, on trouverait qu'elle aurait eu lieu $3^h 13^m$ après l'heure à laquelle elle a eu lieu réellement; ce qui rend bien compte de cette variation.

Elle résulte de la diminution de l'excentricité de l'orbite de la Terre, laquelle va ainsi en diminuant pendant 24000 ans.

En même temps que le mouvement dans l'orbite s'accélère, celui du nœud se ralentit.

Pour avoir le diamètre de l'Ellipse lunaire, il faut trouver sa Parallaxe.

On a trouvé pour le maximum 61'24" et pour le minimum 53'48". Ces parallaxes sont les parallaxes horizontales de Paris. On en conclut les distances de l'apogée et du périgée, qui sont

$$56.r \quad \text{et} \quad 63,4.r.$$

r étant le rayon moyen de la terre

$$r = \frac{40.000.000^m}{2\pi}$$

La distance moyenne est

$$59,7.r.$$

En lieues, cela donne à peu près 86000 lieues. C'est un peu plus de la moitié du rayon du Soleil, en sorte que si l'on supposait le centre du Soleil coïncidant avec celui de la Terre, la Lune ne serait qu'à la moitié de son rayon.

On peut déduire de la parallaxe et du diamètre apparent le rayon

de la Lune. .. on trouve environ les 3/11 de celui de la Terre. Donc sa surface est les 9/121 de celle de la Terre, et son volume 1/49 de celui de la Terre.

La Lune est assez près de la Terre pour que son diamètre apparent varie dans le cours d'une journée. Il augmente en effet à mesure que la Lune se rapproche du Zénith. .. Lorsqu'on observe à l'œil nu, on croit voir un phénomène inverse. Mais cela tient à une illusion d'optique. Au Zénith, nous n'avons pas de point de comparaison, nous nous figurons la Lune plus près, et par conséquent plus petite; tandis qu'à l'horizon, nous voyons un grand nombre d'objets entre nous et la Lune: nous nous la figurons donc très-loin, et par conséquent, nous nous l'imaginons plus loin qu'elle ne l'est réellement.

On peut se servir de l'observation de la distance de la Lune à une Etoile pour déterminer l'heure, de Paris par ex., quand on se trouve dans un lieu éloigné.

On trouve dans la Connaissance des Temps la distance de la Lune aux Etoiles, telle qu'on la verrait du centre de la Terre. Mais l'heure est celle de Paris. .. or, en observant cette distance au lieu donné, et la réduisant au centre de la Terre, on aura l'heure de Paris au moment de l'observation. On mesure au moyen du Sextant la distance EL de l'Etoile à la Lune, en prenant le bord le plus rapproché, et ajoutant le rayon apparent de la Lune, connu pour ce jour et cette heure. On mesure en outre les distances zénithales EZ et LZ, et l'on peut en conclure l'angle Z: Mais les observations sont altérées par la réfraction, et par suite on devra prendre $ZE+r$, $ZL+r'$. – De plus, il faut tenir compte de la Parallaxe de la Lune, qui diminue la distance zénithale, et qui a pour valeur $p = P \sin ZL'$. Donc il faudra prendre

$$ZL + r' - P \sin ZL' = ZL''$$

on aura ainsi les distances zénithales telles qu'elles seraient vues du centre de la Terre, puisque la Parallaxe n'a pas d'influence sur la dist. zen. de l'Etoile. – Les corrections faites, on aura, dans le triangle $ZE'L''$

$$\cos E'L'' = \cos ZE' \cos ZL'' + \sin ZE' \sin ZL'' \cos Z.$$

Connaissant $E'L''$, on aura par une interpolation l'heure de Paris. Supposons d'ailleurs qu'on ait observé le passage au méridien; on aura l'heure du lieu, et, en faisant la différence de ces heures, on aura la Longitude.

Des Eclipses.

La Terre étant éclairée par le Soleil doit projeter un cône d'ombre circonscrit à la fois à leurs deux surfaces. C'est le cône extérieur circonscrit dont il s'agit. Tout point situé dans ce cône d'ombre est dans l'obscurité. Si le plan de l'orbite de la Lune coincidait avec le plan de l'Ecliptique, la Lune serait plongée dans l'obscurité à toutes les oppositions, pourvu toutefois que la longueur de ce cône d'ombre surpasse la distance de la Lune à la Terre.

Mais le plan de l'orbite de la Lune ne coincide pas avec celui de l'Ecliptique. Il faut que la Lune soit voisine de son nœud pour que l'Eclipse puisse avoir lieu.

Il faut donc avant tout déterminer la longueur du cône d'ombre.

Soit V son extrémité, $D = 24045\, r$ la distance du Soleil à la Terre, $R = 112\, r$ son rayon, on trouve

$$TV = \frac{24045}{111}\, r = 216\, r$$

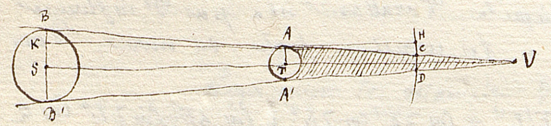
et cela ne peut varier que de $1/60$ en plus ou en moins, puisque l'excentricité est de $1/60$.

Or la distance de la Lune à la Terre est seulement $60\, r$.

Si donc la latitude de la Lune n'est pas trop grande, il y aura éclipse de Lune.

Voyons si cette éclipse peut être totale. (voir Leverrier).

Imaginons que, du centre de la Terre, avec un rayon égal à la distance de la Lune à la Terre, on décrive une surface sphérique qui coupe le cône d'ombre suivant un petit cercle CD qu'on appelle le Cercle d'ombre.



Si ce cercle CD est plus grand que le disque de la Lune, il pourra y avoir éclipse totale. Si au contraire il est plus petit, il n'y aura qu'une Eclipse annulaire, les bords seuls de la Lune étant éclairés par le Soleil. Nous allons voir que cela ne peut avoir lieu. Il suffit pour cela de comparer les diamètres apparents du cercle d'ombre et de la Lune, car leur rapport est le même que celui des diamètres vrais.

On peut regarder les lignes CD, AT, BS comme perp. aux génératrices du cône. Imaginons par le point A une parallèle à l'axe du cône, qu'elle termine aux rayons CD, SB, en H et K. Les deux triangles CHA, AKB donnent

$$CH : AH :: BK : AK.$$

Soit $CD = 2\rho$, $CH = r - \rho$, $AH = d$, $BK = R - r$, $AK = D$.

$$r - \rho : d :: R - r : D$$

$$r - \rho = \frac{(R - r)\, d}{D}$$

$$\rho = r - \frac{(R-r)\,\delta}{D} \qquad (1)$$

Soit Δ le diamètre apparent du cercle d'ombre, Δ est la même chose que $\frac{2\rho}{\delta}$ d'après la définition générale des diamètres apparent. — De (1) on tire

$$\frac{\rho}{\delta} = \frac{r}{\delta} - \frac{R}{D} + \frac{r}{D} = \frac{\Delta}{2}$$

or $\frac{r}{\delta}$, c'est l'angle sous lequel le rayon de la Terre est vu de la Lune, c.a.d. la parallaxe horizontale de la Lune. $\frac{R}{D}$, c'est le demi-diam. apparent du soleil. $\frac{r}{D}$, c'est l'angle sous lequel le rayon de la terre serait vu du soleil, c.a.d. la parallaxe horizontale du soleil.

ainsi

$$\frac{\Delta}{2} = \text{parall. horiz. ☾} - \tfrac{1}{2}\,\text{diam. appar}^{t}\ \odot + \text{parall. horiz.}\ \odot$$

Cherchons maintenant le maximum de ce diamètre apparent. Pour cela il faut prendre le maximum de par. hor. ☾, le minimum de diam. app. ☉ et le max. de par. hor. ☉.

$$\text{Max. de } \Delta = 2\,(61'24'' + 9'') - 31'31'' = 1°\,31'\,35''$$

de même

$$\text{Min. de } \Delta = 2\,(53'48'' + 8'') - 32'36'' = 1°\,15'\,16''$$

Or le diamètre apparent de la Lune n'est que de 30' environ, et ne varie en plus et en moins que de 2' ou 3'. — Donc il pourra y avoir Eclipse totale, et, si l'orbite était dans l'écliptique, à chaque nouvelle Lune, il y aurait éclipse totale.

ainsi, les éclipses sont possibles.

Elles peuvent être totales ou partielles, jamais annulaires.

Pour une nouvelle Lune donnée, y aura-t-il éclipse ?

Il faut qu'au moment de la pleine Lune, la distance de la Lune au centre du cercle d'ombre, c.a.d. la latitude de la Lune, ne dépasse pas sensiblement la demi-somme des diamètres apparents de la Lune et du cercle d'ombre. Car c'est là la condition d'intersection de deux cercles. — J'ai dit ne dépasse pas sensiblement. Car il pourrait se faire que la latitude de la Lune au moment de l'opposition surpassât que peu cette demi-somme, et qu'il y eut encore éclipse. En effet, comme la Lune va par un mouvement parallèle à l'écliptique, il pourrait se faire que, dans les moments qui précèdent ou qui suivent l'opposition, le bord de la Lune entamât quelque peu le cône d'ombre : il y aurait éclipse, mais non à l'époque de l'opposition.

Si au contraire, la latitude de la Lune est moindre, il est bien certain qu'il y aura éclipse.

Examinons cette condition.

Le maximum de Δ, augmenté du maximum du diam. apparent de la Lune, et divisé par 2, donne

$$\tfrac{1}{2}\,(1°\,31'35'' + 33'30'') = 1°\,2'\,32''$$

Le minimum est

$$\tfrac{1}{2}\,(1°\,15'16'' + 29'30'') = 52'\,24''$$

Suivant les cas, cette demi-somme pourra avoir telle ou telle valeur intermédiaire entre ces deux-ci, suivant les distances relatives du

Soleil, de la Terre, et de la Lune.

Ainsi, pour une pleine Lune donnée, vous pouvez calculer Δ et le diam. apparent de la Lune, et prendre la demi-somme (on trouve les élémens de ce calcul dans la connaissance des Temps). On connaît aussi la latitude de la Lune, et, si cette latitude est plus grande que la demi-somme trouvée, il ne pourra y avoir d'éclipse.

Si au contraire, la latitude de la Lune ne surpasse pas cette limite ou ne la surpasse que très-peu, il y aura lieu de calculer les circonstances de l'éclipse.

C'est ce que nous allons faire.

Détermination des circonstances principales d'une Eclipse de Lune.

On trouve dans la connaissance des Temps, de 3^h en 3^h les longitudes de la Lune et du Soleil. — On saura à 3 h. près l'époque de l'opposition. Par interpolation, on aura l'instant précis de l'opposition.

Désignons par t le temps compté à partir de l'heure de la connaissance des Temps qui précède l'opposition. — Pour l'époque $t=0$, vous trouverez dans la connaissance des Temps le diam. apparent de la Lune que j'appelle δ. — Vous trouverez aussi les élémens nécessaires pour les calculs du diam. apparent de l'ombre. — Vous y verrez aussi la longitude du ☉. En y ajoutant 180°, vous aurez la longitude de l'axe du cône d'ombre, et par conséquent la longitude du centre du cercle d'ombre. — Soit L cette longitude, et l celle de la Lune.

Soit λ la latitude de la Lune.

Enfin, vous trouverez également le mouvement en longitude M du ☉. J'entends par mouvement en longitude du ☉ la quantité dont la longitude du ☉ varie dans l'unité de temps. C'est aussi le mouvement en longitude du cercle d'ombre. — Soit pareillement m le mouvement en longitude de la Lune, et μ son mouvement en latitude. — Ces trois données se calculeront en divisant par 3 les différences des longitudes et latitudes de 3^h en 3^h qui se trouvent dans la connaissance des Temps.

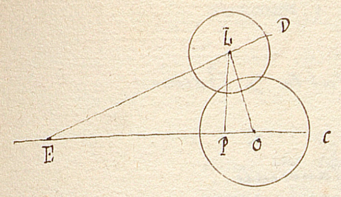
Résumons :

$t=0$	δ	, diam. app. de la ☾
	Δ	" du cercle d'ombre.
	L	, Longitude "
	l	" de ☾.
	λ	Latitude "
	M	Mouvement en longitude du ☉
	m	" " de ☾
	μ	" latitude "

Cela posé,

Représentons par la ligne horizontale EC l'écliptique, par ED l'orbite de la Lune. — À l'époque t, le cercle d'ombre occupe la position O, et a son centre sur l'écliptique. — Soit L le centre de la Lune.

J'appelle z la distance LO des deux centres. — C'est là la quantité



la quantité qu'il faut déterminer en fonction du temps, car c'est elle qui détermine les circonstances de l'Eclipse.
abaissons LP perp. à l'Ecliptique.
Puisque L et l sont les longitudes du ☉ et de la ☾ pour l'époque $t=0$, on aura pour l'époque t

$$\text{Long. } ☉ = L + Mt$$
$$\text{Long. } ☾ = l + mt$$

donc

$$OP = L - l + (M-m)t$$

de même

$$LP = \lambda + \mu t$$

donc à une époque quelconque

$$z^2 = \{L - l + (M-m)t\}^2 + (\lambda + \mu t)^2$$

développant on a

$$z^2 = at^2 + 2bt + c$$

en posant

$$\begin{cases} a = (M-m)^2 + \mu^2 \\ -b = (L-l)(M-m) + \lambda\mu \\ c = (L-l)^2 + \lambda^2 \end{cases}$$

Cette formule fait connaître z à l'époque t. — Si l'on donne z et qu'on demande t, on en tire :

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac + az^2}}{a}$$

or on a

$$b^2 - ac = -h^2$$

en posant

$$h = L(M-m) - \mu(L-l)$$

alors

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{az^2 - h^2}}{a}$$

on voit ici quel est le minimum de z. car a est nécessairement. >0 :

$$z > \frac{h}{\sqrt{a}}$$

donc, pour qu'il y ait éclipse, il faut que le minimum de z soit plus petit que la 1/2 somme des diamètres apparents de la Lune et du cercle d'ombre

$$\frac{h}{\sqrt{a}} < \frac{\Delta + \delta}{2}$$

dans ce cas, il y aura donc éclipse, puisque la distance des centres est plus petite que la somme des rayons.

L'époque où l'éclipse est la plus complète est celle où le radical est nul

$$t_1 = -\frac{b}{a}$$

Quelle est l'époque du commencement de l'Eclipse, et celle de la fin ?

L'éclipse commencera lorsque z est égal à $\frac{\Delta+\delta}{2}$. Faisons donc

$z = \frac{\Delta + \delta}{2}$ dans la valeur de t. Vous aurez

t' répond^t. au Signe $+$, c'est la $>$ Racine

t'' " " $-$ " $<$ "

ce sont les époques où les cercles seront tangents.

L'Eclipse sera-t-elle totale ou partielle ?

Il faut voir si les deux cercles sont sécants ou intérieurs l'un à l'autre lors de l'Eclipse maxima. — Si alors

$$\frac{h}{\sqrt{a}} > \frac{\Delta - \delta}{2} \quad \text{Eclipse partielle}$$

$$\frac{h}{\sqrt{a}} < \frac{\Delta - \delta}{2} \quad \text{Eclipse totale.}$$

à une époque quelconque, on peut demander quelle est la portion du diamètre dirigé suivant la ligne des centres qui est cachée, c.àd. la portion de la Lune éclipsée.

Cette partie se mesure par la longueur AB. — vous avez



$$AB = LB - LA = \frac{\delta}{2} - LA$$

or

$$LA = z - \frac{\Delta}{2}$$

Substituant

$$AB = \frac{\Delta + \delta}{2} - z$$

on compare ordinairement AB au diamètre de la Lune. On divise ce diam. en douzièmes, et chaque douzième s'appelle un doigt. Si deux douzièmes sont cachés, on dit que l'éclipse est de deux doigts.

Pour un point donné de la Terre, y aura-t-il Eclipse ? Il faudra pour cela que la Lune soit au-dessus de l'horizon. — or la Connaissance des Temps donne très-exactement l'heure du Lever et du Coucher de la Lune.

Chaque circonstance d'une Eclipse est vue par la moitié de la Terre, et comme l'éclipse peut durer 2 ou 3^h. elle peut être vue par les $\frac{5}{8}$ de la surface terrestre.

Le diamètre de l'ombre doit être pris un peu plus grand que le Calcul ne l'apprend. Car la Terre est entourée d'une atmosphère qui affaiblit beaucoup les Rayons lumineux qui passent à la surface : de sorte qu'il faut supposer que le Rayon de la partie solide de la Terre soit plus grand, et l'augmenter de 1' 40" pour qu'il y ait concordance.

Sur le bord de l'ombre, on remarque une teinte rougeâtre, qui est due à l'absorption de la lumière par l'atmosphère, absorption moins sensible pour les Rayons rouges. — D'ailleurs les Rayons rouges étant réfractés davantage peuvent pénétrer dans les régions de l'ombre que les autres ne peuvent atteindre.

Avant l'Eclipse, on observe un affaiblissement dans la lumière de la Lune. — Cela tient à la pénombre. — Détails. —

Pour trouver l'époque précise de l'entrée de la Lune dans cette pénombre, il faut calculer le cercle de pénombre C'D' comme on a calculé le cercle d'ombre CD. — En raisonnant de la même

manière, on trouve

$$\frac{1}{2}\Delta' = \text{par. hor.}\ ☾ + \text{parall. hor.}\ ☉ + \frac{1}{2}\ \text{diam. app.}\ ☉$$

Au bout de 18 ans et 10 jours, la lune se retrouve placée de la même manière par rapport au Soleil tant en longitude qu'en latitude, et nous en avons conclu que les éclipses devaient se reproduire dans le même ordre.

Les tables montrent que, en 18 ans et 10 jours, il y a 29 éclipses de Lune.

Pour un lieu donné, il est possible qu'il n'y ait que 20 éclipses visibles.

On peut se demander quelles circonstances ont lieu pour un habitant de la Lune au moment de l'éclipse. Il y a évidemment éclipse de Soleil.

Il peut se faire que pour cet observateur il y ait éclipse partielle de Soleil, tandis que nous n'avons pas éclipse de Lune. Car si l'on imagine les points de la Lune qui sont dans la pénombre, on voit que la Terre leur cache une partie du Soleil.

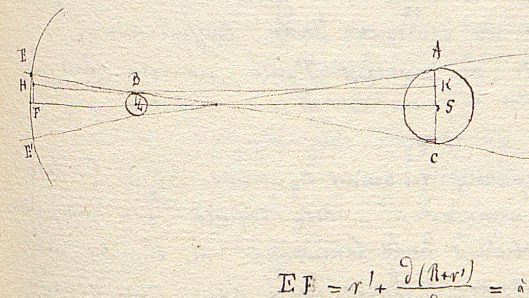
Eclipses de Soleil.

Remarquons d'abord qu'une éclipse de Soleil ne peut avoir lieu en même temps pour toute la Terre, puisque celle-ci est plus grosse que la Lune.

Une éclipse de Soleil ne peut avoir lieu qu'aux nouvelles Lunes ou conjonctions.

Soit à ce moment S le Soleil, L la Lune. Imaginons le cône circonscrit à la fois au Soleil et à la Lune. Le prolongement de ce cône sera le cône d'ombre projeté par la Lune. — La Lune est plus petite que la Terre, celle-ci ne peut être renfermée dans ce cône, donc il ne peut y avoir éclipse de Soleil pour toute la Terre.

Si nous voulons avoir les points où l'éclipse sera partielle, imaginons le cône d'ombre circonscrit intérieurement. La Terre peut-elle être renfermée entièrement dans ce cône de pénombre ? — Pour cela, du point L comme centre, avec la distance D la de la Terre à la Lune, décrivons une sphère ; soit EE' son intersection avec le cône de pénombre. Calculons le demi-diamètre de EE'. Soit BL = r'. Les deux triangles semblables EBH, BKC donnent



$$EH : d :: R + r' : D - d$$

$$EH = \frac{d(R+r')}{D-d}$$

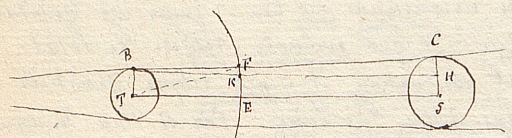
$$EF = r' + \frac{d(R+r')}{D-d} = \text{à peu près}\ r' + \frac{dR}{D} = \frac{3}{11}r + \frac{1}{400}.112\,r = \left(\frac{3}{11} + \frac{112}{400}\right)r = 0{,}55\,r.$$

ainsi le rayon du cercle de pénombre n'est environ que 0,55 r. Ainsi il n'y a que le quart de la surface d'un hémisphère qui verra l'éclipse de Soleil en même temps. Le cercle d'intersection se promène sur la surface de la Terre, et il n'y a que pour les points de la bande ainsi déterminée que l'éclipse sera visible.

Possibilité d'une éclipse de Soleil.

Que faut-il pour qu'à une nouvelle lune il y ait éclipse de Soleil ? Il faut que la Terre atteigne ce cercle de pénombre.

Figurons le Soleil et la Terre, et le cône circonscrit aux deux. Si la Lune est en dehors de ce cône, il n'y aura pas éclipse. — Pour que la pénétration ait lieu, il faut que la latitude de la Lune ne surpasse pas une certaine limite, et, pour trouver cette limite, il faut, du centre de la Terre, décrire un cercle EF et chercher le demi-diamètre apparent EF de ce cercle, c.à.d. l'angle FTE. En effet, pour l'éclipse, il faut que la latitude de la Lune soit plus petite que la demi-somme des diamètres apparents de la Lune et du cercle EF. — Car, en supposant que l'orbite de la Lune coïncide avec le plan de l'écliptique, il faut pour que l'éclipse commence, que la latitude de la Lune soit juste égale à cette demi-somme, et l'on voit facilement qu'à cause de l'obliquité, elle doit être un peu plus petite.



Calculons donc FTE = ½ diam. apparent du cercle d'ombre. Menons par le point B une droite BH parallèle à TS. Soit EF = ρ_1. On a dans les triangles semblables BEK, BCH

$$\rho_1 - r : R - r :: d : D$$

$$\rho_1 = r + \frac{(R-r)d}{D}$$

$$\frac{\rho_1}{d} \text{ ou } FTE = \frac{r}{d} + \frac{R}{D} - \frac{r}{D}$$

$$\frac{\rho_1}{d} = \text{par. hor. } ☾ + \tfrac{1}{2} \text{ diam. app. } ⊙ - \text{par. hor. } ⊙$$

appelons ce diam. apparent Δ_1 : alors

$$\frac{\Delta_1}{2} = \text{par. hor. } ☾ + \tfrac{1}{2} \text{ diam. app. } ⊙ - \text{par. hor. } ⊙$$

ainsi il faut que

$$\lambda < \frac{\Delta_1 + \delta}{2}$$

Si cela a lieu, il y aura éclipse pour quelques points de la Terre. Si la latitude est à peu près égale à $\frac{\Delta_1 + \delta}{2}$, il pourra y avoir éclipse, mais ce ne sera pas exactement au moment de la conjonction.

Ainsi, on saura prédire si, au moment d'une nouvelle Lune, il doit y avoir éclipse de Soleil.

Pour le reste, nous remarquerons seulement qu'une éclipse de Soleil peut être tantôt complète, tantôt annulaire. — Cela résulte de la comparaison des diam. apparents du Soleil et de la Lune. — Les limites entre lesquelles varient les diamètres apparents de la Lune sont plus grandes que celles entre lesquelles varient ceux du Soleil. — Il peut donc arriver

que le diamètre de la Lune soit le plus petit : alors, l'éclipse est annulaire, ou qu'il soit plus grand, alors l'éclipse sera totale.

Pour deux points de la Terre, une même éclipse peut être annulaire et totale. En effet, si l'on s'éloigne de la Lune à la surface de la Terre, le diam. apparent de la Lune diminuera plus vite que celui du Soleil.

Les limites entre lesquelles une éclipse de Soleil est possible sont, relativement à la latitude de la Lune, beaucoup plus grandes que celles où une éclipse de Lune est possible. — En prenant les moyennes, on les trouve dans le rapport de 89' à 57'.

Les tables montrent qu'en 18 ans 10 jours, il y a 41 éclipses de Soleil. — Mais, pour un point de la Terre, les éclipses de Soleil sont moins souvent visibles que celles de la Lune, puisqu'une éclipse de Soleil n'est visible que d'une petite portion de la Terre.

En réalité, bien que les éclipses de Soleil soient plus fréquentes que les éclipses de Lune, elles sont moins souvent visibles pour un point donné de la Terre.

Une éclipse totale de Soleil est aussi bien ~~plus~~ moins fréquente qu'une éclipse totale de ~~Sol.~~ Lune. — En effet, pour qu'une éclipse de Soleil soit totale, il faut que son centre et celui de la Lune soient situés sensiblement sur la droite partant de l'œil d'un observateur de la Terre, tandis que le cercle d'ombre dans lequel pénètre la Lune lors d'une éclipse totale de Lune a un rayon à peu près triple de celui de la Lune.

Quant aux éclipses annulaires et totales, leur possibilité est la même, puisqu'il suffit, dans le cas où les deux astres sont concentriques, que le diam. de la Lune soit plus petit ou plus grand que le diamètre du Soleil, et que, pendant une moitié de l'année, le diam. de la Lune est le plus petit, et que pendant l'autre moitié, il est le plus grand.

Mouvement de la Lune sur elle-même.

Les observations montrent que la Lune tourne toujours la même face vers la Terre.

Il résulte de là que la Lune tourne sur elle-même dans le même temps que dure sa révolution sidérale.

(Chasles, p. 384).

En déterminant avec précision la distance de points remarquables de l'astre par rapport au centre, on peut déterminer l'équateur lunaire, c.à.d. le plan perpendiculaire à l'axe de rotation. — On a remarqué que le plan de l'équateur lunaire, le plan de son orbite et le plan de l'écliptique sont tellement placés que les intersections de l'un d'eux avec les deux autres sont deux droites parallèles, ce qui revient à dire que si, par un même point de l'espace, on mène trois plans paral-

parallèles à ceux-ci, ils se coupent suivant une même droite : — on voit encore, que si par un même point de l'espace, on mène trois droites perpendiculaires à ces plans, elles seront dans un même plan, et présenteront la disposition ci-contre.



Bien que la Lune nous présente toujours la même face, cependant, vers les bords du disque, il y a des points qui se cachent et reviennent ensuite. Ce phénomène porte le nom de **Libration**, et il est facile de s'en rendre compte.

D'abord, l'axe de rotation de la Lune n'est pas exactement perpendiculaire au plan de l'écliptique. Il s'ensuit que si, à une certaine époque, cet axe est dans le plan perp. à l'orbite de la Lune passant par la Terre, la partie visible de la Lune renfermera une des extrémités de cet axe qui se trouvera vers le bord, et l'on verra même un peu au-delà de cet axe un petit cercle de la Lune. Au bout de ½ révolution sidérale, la Lune sera venue se placer de l'autre côté ; alors ce sera l'autre extrémité de l'axe qui sera visible de la Terre. — Si donc de chaque pôle de la Lune, avec un arc égal à 6° 39' on décrit un petit cercle, les points de ces zones seront tantôt visibles, tantôt invisibles. — C'est ce qui forme la Libration en latitude.

Il y a encore un autre genre de libration qui consiste en ce que certaines portions du disque situées à droite ou à gauche du centre se déplacent. Il est facile d'en rendre compte (Leverrier). C'est la Libration en Longitude.

La découverte des Lunettes a permis de voir sur la Lune des montagnes de forme volcanique. — On a pu déterminer leur hauteur par l'ombre qu'elles projettent. Elles vont jusqu'à 2800^{m}.

En outre on observe des dépressions considérables. On les avait prises pour des mers. Mais, en y regardant de près, on voit qu'il n'en est rien. — La Lune d'ailleurs n'a pas d'atmosphère, et, s'il y avait des mers, il y aurait probablement une atmosphère.

L'absence d'atmosphère est démontrée par plusieurs phénomènes... Dans les éclipses en effet, la lumière est brusquement occultée. — De plus les rayons lumineux venant des Étoiles et passant très près de la Lune ne sont pas réfractés.

Des Planètes.

Les planètes se distinguent des Etoiles en ce qu'elles ont un mouvement propre.

En outre, elles ont un diam. apparent dans les Lunettes.

Puis leur lumière, à l'exception de Vénus, n'est pas scintillante.

Il y a aussi d'autres astres qui ont des mouvements apparents. Ce sont les Comètes. Mais, outre d'autres particularités, leurs orbites sont des Ellipses très-allongées, tandis que les orbites des planètes &c sont des ellipses dont l'excentricité est très-petite.

Noms des Planètes.

Petites planètes. – aujourd'hui (20 Mars 1854) on en connaît 29.

On conclut la Longitude et la Latitude de l'observation de l'AR et de la Déclinaison.

Les planètes s'écartent peu de l'Ecliptique, et restent dans une bande de 18° dont l'Ecliptique est le milieu, et qu'on appelle le Zodiaque.

La Latitude des planètes est alternativement positive et négative.

Nœuds, ascendant et descendant.

Les intervalles de temps entre deux passages d'une même planète au nœud sont peu égaux.

Les mouvements des planètes en Longitude ne sont pas aussi simples. Ils sont tantôt directs et tantôt rétrogrades, et, au moment du changement de signe, la planète reste stationnaire.

Cependant, quand on observe pendant longtemps, on voit que le mouvement direct l'emporte sur le mouvement inverse.

Les planètes ont aussi des Phases, qui sont surtout visibles pour Vénus: – ce qui prouve qu'elles reçoivent leur lumière du Soleil.

Explication détaillée des phases de Vénus.

Elles ont lieu aussi pour Mercure, qui devient invisible à la Conjonction inférieure.

Planètes Supérieures. – Pourquoi l'on ne voit guère leurs phases. – Elles ne sont sensibles que pour Mars: elles sont presque nulles pour Jupiter et Saturne.

Les variations de distance des Planètes à la Terre nous sont déjà indiquées par les phases, surtout pour les planètes inférieures, Vénus par exemple.

Conjonctions Supérieures et Inférieures.

Oppositions.

Variation du diamètre apparent. – Celui de Vénus varie de 60" à 10".

celui de Mercure, de 12" à 5", celui de Mars de 18" à 4".

On voit que l'ensemble de ces phénomènes conduit à penser que c'est surtout autour du ☉ que le mouvement doit être régulier, et qu'on arrivera plutôt à des lois simples en cherchant le mouvement des planètes pour un observateur placé au centre du Soleil.

Nous avons vu comment on détermine les Longitudes et Latitudes Géocentriques. – Nous allons chercher les Longitudes et Latitudes qu'on nomme Héliocentriques, qui auraient lieu pour un observateur placé au centre du Soleil. – Si l'on imagine un grand cercle perp. au plan de l'Écliptique, et passant par la planète et le Soleil, ce grand cercle coupera l'Écliptique en un point, et la distance angulaire de ce point à l'un des équinoxes sera la Longitude Héliocentrique. De plus, la distance de la planète à ce point est la Latitude Héliocentrique.

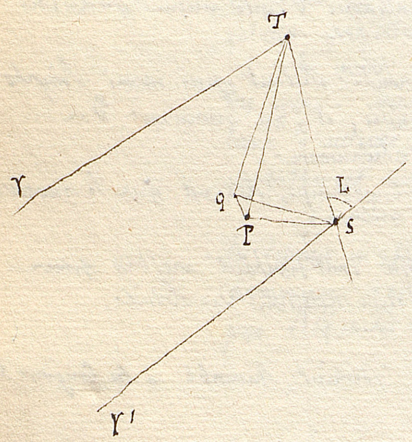
Si l'on y joint la distance de la planète au ☉, on aura ainsi les trois coordonnées héliocentriques qui fixent la position de la planète.

Si donc on détermine pour des époques très rapprochées ces trois coordonnées, on aura le mouvement de la planète.

La chose serait facile si l'on pouvait déterminer avec assez d'exactitude la parallaxe horizontale de la planète. Car on en déduirait sur le champ sa distance à la Terre.

Détermination des coordonnées héliocentriques.

Soit T la Terre, Tγ la ligne des Équinoxes, le papier est le plan de l'Écliptique. Soit S le Soleil. $S T \gamma = L$ = longitude ☉. – Soit P la planète située hors du plan de l'Écliptique, Q sa projection sur ce plan. Je joins P et Q au centre de la Terre. L'angle $QT\gamma$ est la Longitude Géocentrique l. L'angle PTQ est la Latitude Géocentrique λ. Nous avons déterminé la Parallaxe : donc nous connaissons la distance $PT = r$.



Il est facile avec cela de déterminer les coordonnées Héliocentriques. – Soit $SP = r'$. – Menons SQ. Si nous menons par le point S une parallèle $S\gamma'$ à la ligne des Équinoxes, l'angle $QS\gamma'$ est égal à 2π – la Long. Hélioc. de P.

$$QS\gamma' = 2\pi - l'$$
$$QSP = \lambda'$$

Il faut déterminer r', l', λ'. La chose est aisée.

Dans le triangle QST, on connait l'angle $QTS = L - l$, les côtés qui le comprennent, $TS = R$ donné par les Tables du ☉, et $TQ = r \cos \lambda$. On connaîtra donc SQ, et aussi l'angle TSQ. On en conclut facilement

$$QS\gamma' = 2\pi - l' = \pi - L - TSQ$$
$$l' = \pi + L + TSQ$$

Dans le triangle PQS, rectangle en Q, on a SQ, et par suite

et PQ qui est égal à $r \sin\lambda$. Donc

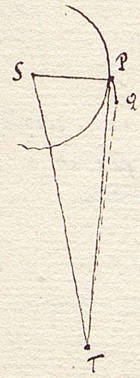
$$\operatorname{tg}\lambda' = \frac{r \sin\lambda}{SQ}$$

$$SP = \frac{SQ}{\cos\lambda'} = r'$$

on a donc déterminé r', l', λ', c'est-à-dire les coordonnées héliocentriques, qu'on convertirait facilement en 3 coordonnées rectangulaires.

Mais la parallaxe horizontale ne peut pas être déterminée avec assez de précision pour que cette méthode soit bien bonne.

Cependant, à l'époque où la distance angulaire de la planète au soleil est maximum, et sensiblement égale à 90° (elle le serait rigoureusement si l'orbite était un cercle) on peut déterminer r sans avoir besoin de la parallaxe horizontale. — En effet, le triangle TPS étant alors rectangle, on aura



$$TP = TS . \cos PTS$$

$$r = R \cos PTS$$

et l'angle PTS est observable. — D'ailleurs, on peut le calculer. Car si l'on imagine l'angle solide trièdre T, PQS dont le sommet est en T, et le triangle sphérique correspondant, on aura

$$\cos PTS = \cos\lambda \cos(L - l)$$

d'où

$$r = R . \cos\lambda \cos(L - l)$$

Nous sommes ramenés au cas précédent, et nous n'avons plus besoin de la parallaxe.

Cela n'a lieu qu'à l'époque de la plus grande élongation, et, comme elle arrive assez fréquemment (tous les 270 jours pour Vénus), on pourra ainsi marquer diverses positions de l'orbite de la planète, et vérifier

1° que l'orbite est une ellipse dont le ☉ occupe un foyer,

2°. que la loi des aires s'applique,

3°. que les carrés des temps des révolutions sont proportionnels aux cubes des grands axes.

Toutefois, cela exigerait des observations très-longues et continues.

Il y a d'autres méthodes.

Admettons d'avance les lois de Képler. — Nous allons chercher les lois du mouvement, et nous assignerons ainsi à chaque instant la position de la planète. Il restera ensuite à vérifier par l'observation les lois supposées.

Pour chaque planète, il y a 7 éléments à déterminer.

Dans le cours de Mécanique, on n'en donne que six : parce que le temps de la révolution est lié au grand axe par la 3e loi de Képler. — Mais ici, nous ne sommes pas censés connaître cette loi, de sorte qu'on a à déterminer

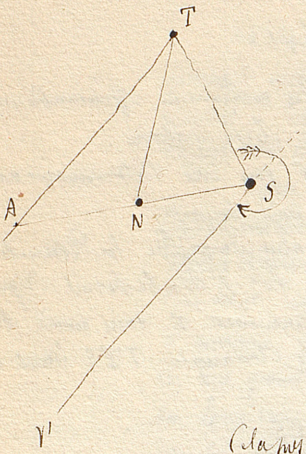
T (durée d'une révolut.) a ($\frac{1}{2}$ grand axe) e (excentricité)

c (époque du passage au périhélie) ω (angle que le rayon mené du ☉ au périhélie fait avec le nœud ascendant) α (longitude de ce nœud)

γ (inclin. de l'orbite sur le plan de l'écliptique).

Je commence par chercher la longitude du nœud $\underline{\alpha}$. — Pour cela, on observera la planète au moment précis où elle passe à son nœud ascendant.

Soit $T\gamma$ la ligne des Équinoxes, S le Soleil, N la planète au moment où elle est dans le plan de l'écliptique, c.à.d. à son nœud. Menons SN jusqu'en A.



Si l'on imagine $S\gamma'$ parallèle à $T\gamma$, la longitude est $NS\gamma'$ ou $2\pi-\alpha$, puisqu'elle se compte dans le sens de la flèche. — Dans le triangle TNS, en nommant $R=TS$, la longitude du Soleil ATS

$$ATS = L_1$$
$$ATN = l$$
$$NTS = L-l.$$

Voyons maintenant quelle est la valeur de l'angle TSN. On voit que

$$TSN + AS\gamma' \text{ ou } 2\pi-\alpha + L_1 = \pi$$

ou

$$TSN = \alpha - L_1 - \pi$$

D'après, le triangle TSN donne la proportion

$$\frac{SN}{R} = \frac{\sin(L_1-l)}{\sin(\alpha-L_1-\pi)} = \frac{\sin(L_1-l)}{\sin(L_1-\alpha)}$$

Il y a là deux inconnues, SN et α. — Mais, on observera un second passage de la planète au Nœud. α et SN resteront constants, car la planète a un mouvement révolutif. Donc

$$\frac{SN}{R_1} = \frac{\sin(L_1-l_1)}{\sin(L_1-\alpha)}$$

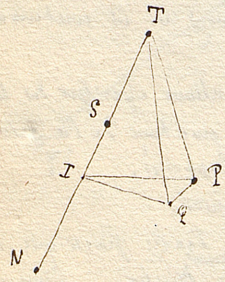
Divisant membre à membre

$$\frac{\sin(L_1-\alpha)}{\sin(L_1-\alpha)} = \frac{R_1}{R}\,\frac{\sin(L_1-l_1)}{\sin(L_1-l)}$$

J'ai donc tiré α : car en développant ... et divisant par $\cos\alpha$, on a $tg\,\alpha$.

Ayant la longitude du Nœud, il nous faut déterminer l'inclinaison γ. — On choisit le moment où la longitude du Soleil est précisément égale à la longitude héliocentrique du Nœud.

Traçons la figure pour cette circonstance. — Alors la Terre se trouve sur NS prolongé : la planète est quelque part en P au-dessus ou au-dessous du plan de l'écliptique. J'abaisse PQ perp. sur ce plan. J'abaisse QI perp. sur SN, et je joins IP. L'angle en I mesure l'angle du plan de l'écliptique avec le plan de l'orbite.



Donc $PIQ = \gamma$.

Joignons TP, TQ, on a l'angle trièdre $TIPQ$ qui donne

$$tg\,\lambda = tg\,\gamma \sin ITQ$$

or ITQ est la différence des longitudes

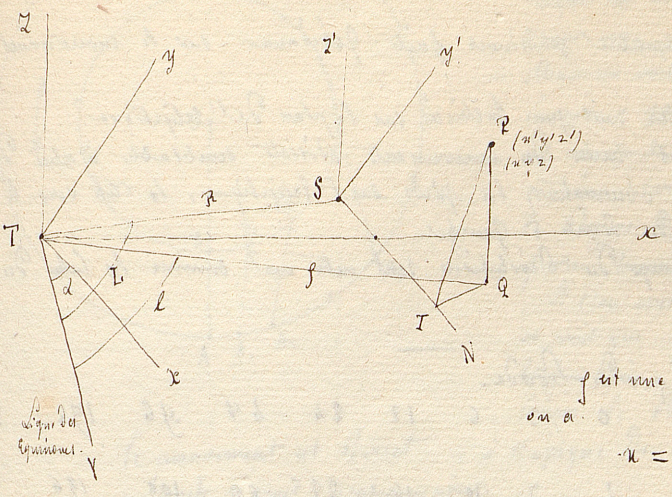
$$tg\,\lambda = tg\,\gamma \sin(L-l)$$

$$tg\,\gamma = \frac{tg\,\lambda}{\sin(L-l)}$$

Les autres éléments sont faciles à trouver maintenant. — Pour cela, nous allons montrer comment, à une époque quelconque, on peut déterminer les trois coordonnées héliocentriques de la planète.

Imaginons par le centre de la terre et dans le plan de l'écliptique

une parallèle à la ligne des nœuds. Soit pris cette droite pour axe des x. Menons-lui dans le plan de l'écliptique un axe perp. Ty, et une perp. commune Tz qui sera l'axe des z. — Imaginons par le point S trois axes parallèles à ceux-là, Sx', Sy', Sz'. Soit P une position quelconque de la planète. —



Si $TS = R$, on aura les relations

$$x = R\cos(L-\alpha) + x'$$
$$y = R\sin(L-\alpha) + y'$$
$$z = z'$$

abaissons $PQ = z = z'$. Soit $\rho = TQ$. ρ est une variable auxiliaire qui va disparaître.

on a

$$x = \rho\cos(l-\alpha)$$
$$y = \rho\sin(l-\alpha)$$
$$z = \rho\,\mathrm{tg}\,\lambda \qquad (\lambda = PTQ)$$

Substituant dans les formules précédentes, on aura

$$x' = \rho\cos(l-\alpha) - R\cos(L-\alpha)$$
$$y' = \rho\sin(l-\alpha) - R\sin(L-\alpha)$$
$$z' = \rho\,\mathrm{tg}\,\lambda$$

or si l'on abaisse QI perp. à SN, et qu'on joigne IP, l'angle PIQ est connu : c'est γ, et l'on a

$$z' = y'\,\mathrm{tg}\,\gamma$$

voilà 4 équations entre $x'y'z'$ et ρ. Éliminant ρ, on aura $x'y'z'$. Ces équations supposent qu'on a α et γ.

Ayant x', y', z', il est facile d'en déduire la distance de la planète au soleil.

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = SP.$$

et les angles

$$\sin\lambda' = \frac{z'}{r'}$$

de même

$$\mathrm{tg}\,QSI = \frac{QI}{IS} = \frac{z'\,\mathrm{tg}\,\gamma}{x'}$$

ainsi l'on pourra avoir à chaque instant les trois coordonnées héliocentriques.

On en déduit que la planète a bien les positions assignées par les formules du mouvement elliptique.

En effet, l'équation de l'ellipse est

$$r' = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\omega)}$$

trois observations donnent r' et v. — Par suite on aura a, e, ω. — Ces trois éléments étant connus, on pourra calculer r' pour une autre position de la planète à laquelle répond une autre valeur de v, et vérifier si les valeurs trouvées par l'observation sont d'accord avec

ces Résultats du Calcul.

On a Reconnu plusieurs faits Généraux sur le mouvement des planètes.

1°. Les orbites sont peu inclinées sur le plan de l'écliptique.

2°. Elles ont toutes des mouvements directs semblables à celui de la Terre ou du Soleil. Un observateur, les pieds sur l'écliptique, la tête vers le N. les verrait tourner de droite à gauche.

3°. Les temps des Révolutions sont entre eux comme les cubes des grands axes.

Loi Empirique de Bode.

	0	3	6	12	24	48	96	192	384
+ 4									
	4	7	10	16	28	52	100	196	388
	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Pallas	Jupit.	Sat.	Uran.	Nept.

Dans Neptune, l'erreur est considérable.

Il est facile maintenant de nous rendre compte des phénomènes que nous offre le mouvement des Planètes tel que nous le voyons de la Terre.

On suppose que la Terre ou le Soleil immobiles. — C'est cette dernière hypothèse que nous ferons.

Soit S le Soleil, et les orbites de Vénus et de la Terre. On peut supposer que ces orbites sont dans un même plan, et que le mouvement soit uniforme. — On a, d'après la 3e loi de Kepler:

$$T^2 : T'^2 :: a^3 : a'^3$$

$$T : T' :: a^{\frac{3}{2}} : a'^{\frac{3}{2}}$$

Soient

$$n = \frac{2\pi}{T} \qquad n' = \frac{2\pi}{T'}$$

n et n' étant les vitesses angulaires de la Terre et de Vénus.

$$n : n' :: a'^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{3}{2}}$$

La vitesse absolue de la Terre est an, celle de Vénus $a'n'$:

$$an : a'n' :: aa'^{\frac{3}{2}} : a'a^{\frac{3}{2}}$$

$$:: \sqrt{a'} : \sqrt{a}$$

or $a > a'$; Donc $a'n' > an$.

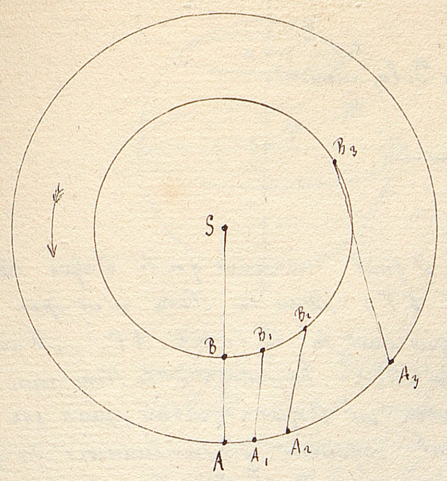
ainsi

La vitesse absolue de Vénus est plus grande que celle de la Terre, et en même

La vitesse absolue d'une planète est d'autant plus grande qu'elle sera plus rapprochée du Soleil.

Il en est de même des vitesses angulaires.

Supposons maintenant qu'à une certaine époque, la Terre et



Vénus soient en conjonction. Soit représenté par la flèche le sens commun de leur Révolution.

Quand Vénus sera en B, la Terre aura parcouru un arc moindre AA_1. Pour la Terre, Vénus aura paru avoir un mouvement Rétrograde. Mais on voit facilement que cela ne durera pas toujours. ainsi, il viendra un moment où le Rayon qui va de la Terre à Vénus sera tangent à l'orbite de Vénus, et le Rayon A_3B_3 pénétrera cette orbite, et aura paru tourner dans le sens direct.

Si l'on continue à tracer les Rayons visuels, on voit que qq. temps après et avant la conjonction, le mouvement paraît Rétrograde. Dans le reste de la Révolution Synodique, le mouvement est direct. – à l'époque de l'élongation maxima, la planète paraît stationnaire.

Nous avons employé le mot Révolution Synodique, parce qu'il signifie la durée nécessaire pour que la planète et la Terre reprennent les mêmes positions relatives par rapport au Soleil.

Il est facile d'en calculer la durée.

Soit t la durée d'une Révolution synodique, T celle d'une Révolution Sidérale. – La Terre aura parcouru un angle nt, et Vénus un angle $n't$; et l'on doit avoir

$$n't = 2\pi + nt$$

$$t = \frac{2\pi}{n'-n} = \frac{1}{\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}}$$

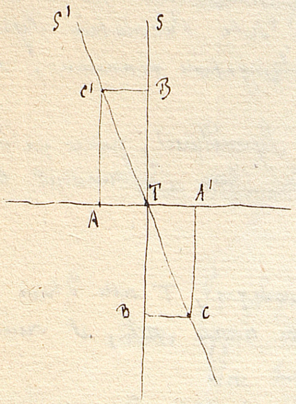
Pour Vénus, cette durée est de 584 jours.

On trouvera partout les détails sur les planètes et leurs satellites.

Voir Leverrier pour l'usage du passage de Vénus sur le disque du Soleil.

Aberration de la Lumière.

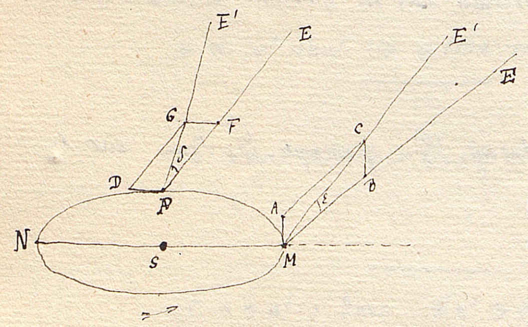
Pour exposer ce phénomène, il faut remarquer que le Rayon Lumineux venant du ☉ est dirigé suivant ST : Mais la Terre n'est pas immobile, et, dans un temps très court, elle parcourt la petite droite AT. _ Mais la Lumière a aussi une certaine vitesse. Imprimons à la Terre une vitesse égale et contraire, nous la réduisons au repos. _ Mais, pour que les apparences restent les mêmes, il faut imprimer à la Lumière une vitesse égale et contraire à celle de la Terre. _ Si l'on construit le parallélogramme TBCA', on voit que la Lumière nous viendra suivant TC, et que le Soleil ne nous paraîtra pas en S, mais en S'.



On peut aussi, pour avoir le Rayon mené à la position apparente de l'astre prendre AT = TA', TB = TB'.
L'angle STS' est appelé l'aberration.
Si l'on manifeste cette aberration, il sera bien sûr que la Terre est en mouvement.

Effet annuel de l'aberration

Représentons l'orbite de la Terre autour du Soleil S. Par la position vraie de l'Etoile E, imaginons un plan perp. au plan de l'Ecliptique. Ce sera le plan du papier, tandis que le plan de l'Ecliptique lui est perpendiculaire. Soit MN la trace de ce plan sur celui de l'Ecliptique. Au moment où la Terre est en M, quelle est l'aberration ?

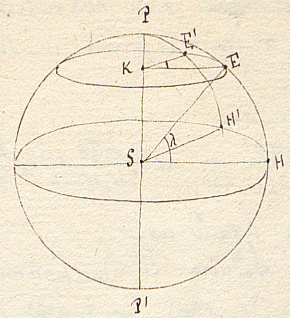


Faisons la construction. L'étoile est vue en E', à gauche de sa vraie position. Sa Longitude est altérée, sa Latitude au contraire l'est fort peu, évidemment (?).
Quelle est l'aberration ε ? Le triangle rectangle MCB donne (en remplaçant le sinus par l'angle)

$$\varepsilon = \frac{BC}{MB} \qquad \text{Soit} \begin{cases} MA = BC = u \\ MB = v \end{cases}$$

$$\varepsilon = \frac{u}{v}$$

Ce n'est pas là la quantité dont la Longitude est altérée. _ Pour avoir cette altération, imaginons une Sphère, et soit EE' l'arc de parallèle correspondant à l'angle EME' de l'autre figure. Cet arc se confond sensiblement avec l'arc de grand cercle qui mesure le déplacement de l'Etoile, et qui a pour expression $\frac{u}{v}$. Or l'aberration en



longitude, HH', est mesurée par l'angle au centre EKE', ou $\frac{EE'}{EK}$, $= \frac{\varepsilon . R}{EK}$. Mais $EK = R \cos\lambda$.

Donc

$$EKE' = \frac{\varepsilon}{\cos\lambda}$$

Donc l'aberration en Longitude est

$$\frac{u}{v \cos\lambda}$$

Six mois après, la Terre se trouve en N. L'aberration en longitude est de sens contraire, et égale à $-\frac{u}{v \cos\lambda}$. En effet, la vitesse de la lumière est la même, mais celle de la Terre est de sens contraire.

Qu'arrivera-t-il aux époques intermédiaires, quand la Terre est en P, à 90° de M? — Traçons la construction. — Le plan PDE est perp. à l'Ecliptique, donc il n'y a pas d'aberration en Longitude; elle sera tout entière en Latitude, et, en l'appelant δ, il sera facile de la calculer. — Il est clair que la Latitude = GFP.

$$\sin\delta \text{ ou } \delta : \sin\lambda :: u : v$$

$$\delta = \frac{u}{v} \sin\lambda$$

Dans le cas dont nous parlons, une Etoile est donc écartée de sa vraie position de $\frac{u}{v}\sin\lambda$.

Six mois après, la Latitude, au ~~lieu~~ d'être augmentée, sera diminuée, de $-\frac{u}{v}\sin\lambda$.

Aux époques intermédiaires il y aura à la fois aberration en Longitude et en Latitude.

A cause de ces changements de signes, on voit qu'autour de la position vraie de l'Etoile, la position apparente décrit une petite courbe fermée qui est une Ellipse.

Quelles sont ses dimensions?

Dans le sens perp. à l'Ecliptique, la dimension de cette courbe est 2δ, double de l'aberration en Latitude ou

$$\frac{2u \sin\lambda}{v}$$

Dans le sens parallèle à l'Ecliptique, c'est 2ε (et non 2 f. l'aberr. en longitude) ou

$$\frac{2u}{v}.$$

Ces lignes sont d'ailleurs les axes. — C'est le diamètre $\frac{2u}{v}$ parallèle à l'Ecliptique qui est le Grand axe.

Donc, dans l'intervalle d'une année, l'Etoile doit, par rapport à sa position vraie, paraître décrire une petite ellipse dont le Grand axe est parallèle à l'Ecliptique. — Les Etoiles très-voisines du pôle de l'écliptique doivent paraître décrire des cercles: au contraire, pour celles qui sont voisines de l'Ecliptique, l'ellipse s'aplatira de plus en plus, et se confondra avec une ligne droite.

En outre, le petit axe varie avec la latitude, mais le Grand axe $\frac{2u}{v}$ est constant pour toutes les Etoiles. — Ce grand axe est facile à calculer. — La vitesse de la Terre est, en appelant a la distance

moyenne de la Terre au Soleil, $u = \frac{2\pi a}{T}$. — La vitesse de la Lumière est $v = \frac{a}{493''}$. Donc $\frac{u}{v} = \frac{2\pi . 493}{T}$, T étant exprimé en secondes. $\frac{u}{v}$ est la moitié du Grand axe.

Si l'on veut l'avoir en degrés, ce sera

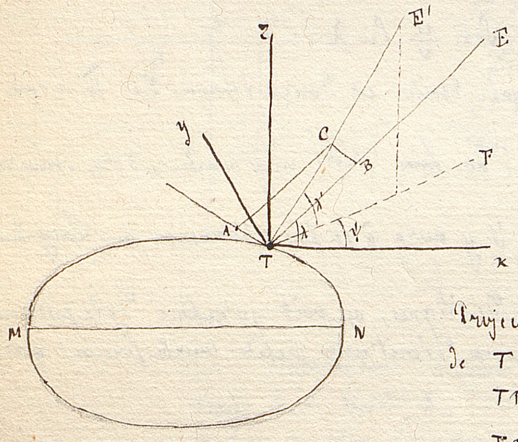
$$360^\circ . \frac{493}{T} = \frac{360^\circ . 493}{365,256 . 86400} = \frac{493^\circ}{365,256 . 240} = \frac{493'}{365,256 . 4} = \frac{493''.15}{365,256} = 20'',25.$$

en doublant, on a $40'',5$ qui est le Grand axe.

Quant au petit axe, on l'en déduira en multipliant par le sinus de la latitude.

C'est à Bradley qu'on doit la découverte de l'aberration et de sa cause, au commencement de la première moitié du dernier siècle.

Nous allons maintenant faire le calcul rigoureux de l'aberration, ce qui nous montrera que la courbe décrite par le rayon lumineux apparent pendant l'année est un cône du 2d. degré, de sorte que si l'on confond la sphère avec son plan tangent, la courbe que paraît décrire l'Étoile est bien une Ellipse.



Soit E l'étoile, T la Terre, MN l'orbite qu'elle décrit autour du ☉. — Imaginons 3 axes rectangulaires emportés par la Terre, dont deux dans le plan de l'Écliptique. Soit Tx parallèle à MN, Ty perp. et Tz.

Soit l'angle $ATx = \varphi$.

Soit TF la projection de TE'.

Soit $TA = u$, $TB = v$, $TC = u'$

$FTx = \psi$, $CTF = \lambda'$.

Projections sur	Tx	Ty	Tz
de TA ..	$u \cos\varphi$	$u \sin\varphi$	0
TB ..	$v \cos\lambda$	0	$v \sin\lambda$
TC ..	$u' \cos\lambda' \cos\psi$	$u' \cos\lambda' \sin\psi$	$u' \sin\lambda'$

Or la projection de la diagonale est égale à la somme des projections des deux autres côtés du parallélogramme sur chacun des 3 axes. Donc

$$\begin{cases} u' \cos\lambda' \cos\psi = u \cos\varphi + v \cos\lambda & (1) \\ u' \cos\lambda' \sin\psi = u \sin\varphi & (2) \\ u' \sin\lambda' = v \sin\lambda & (3) \end{cases}$$

on tire delà u', λ', ψ. — u' est peu important ; mais ψ est l'aberration en longitude, et $\lambda' - \lambda$, l'aberration en latitude.

Si l'on veut avoir l'équation du cône décrit par TE', comme TE' est déterminé par λ' et ψ, il faut chercher une relation entre λ' et ψ indépendante de u' et de φ. — Pour cela, de la dernière équation, je tire

$$u' = \frac{v \sin\lambda}{\sin\lambda'}$$

Reportant dans les autres

$$v \sin\lambda \frac{\cos\lambda' \cos\psi}{\sin\lambda'} - v \cos\lambda = u \cos\varphi$$

$$v \sin\lambda \frac{\cos\lambda' \sin\psi}{\sin\lambda'} = u \sin\varphi$$

Si l'on veut introduire les coordonnées rectangulaires, on a

$$\frac{x}{\cos\lambda'\cos\psi'} = \frac{y}{\sin\lambda'\sin\psi'} = \frac{z}{\sin\lambda'}$$

Par suite

$$v\sin\lambda.\frac{x}{z} - v\cos\lambda = u\cos\varphi$$

$$v\sin\lambda.\frac{y}{z} = u\sin\varphi$$

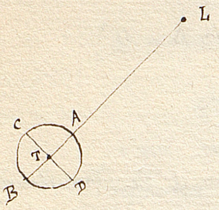
élevant au carré et ajoutant pour éliminer l'φ, on a un cône du second ordre

$$v^2\sin^2\lambda\left(\frac{y^2}{z^2}+\frac{x^2}{z^2}\right) - 2v^2\sin\lambda\cos\lambda\frac{x}{z} + v^2\cos^2\lambda = u^2$$

Outre cette preuve du mouvement de rotation et de translation de la Terre, il y en a une autre qui ne laisse aucun doute : c'est l'accord parfait des résultats trouvés par la théorie de l'attraction et avec ceux de l'observation.

Phénomène des Marées.

Ce phénomène s'explique au moyen de l'attraction que la Lune et le Soleil exercent sur notre globe.



Soit T la Terre, L la Lune, AB le diamètre terrestre passant par la Lune. — Comme le diamètre de la Terre est comparable à la distance des deux astres, l'attraction que la Lune exercera sur le point A sera plus grande que celle qu'elle exercera sur le ~~pou~~ centre T de la Terre.

Si donc il se trouve en A des substances qui, par leur fluidité, puissent prendre un mouvement isolé du reste de la masse terrestre, comme par exemple un liquide, ce liquide sera soulevé. — De même, l'attraction de la Lune sera moins forte au point B qu'elle ne l'est au centre de la Terre. — Ce centre et avec lui toute la masse solide, tendra à se rapprocher de la Lune plus que ne le font les molécules liquides situées en B, et par conséquent il y aura encore en B une masse liquide plus élevée que la surface de niveau. — En A, du côté de la Lune, c'est le liquide qui est attiré au-dessus de la Terre, tandis qu'en B, du côté opposé, c'est la surface de la Terre qui se rapproche de la Lune et laisse le liquide plus éloigné.

Il en résulte que deux masses d'eau, sous la forme de deux montagnes liquides opposées, suivent la Lune dans sa marche, et parcourent la surface des mers pendant la rotation diurne de notre globe. Lorsqu'elles rencontrent des rivages, elles s'y précipitent en les recouvrant à une certaine hauteur, et arrêtent les fleuves qu'elles font refluer vers leurs sources : c'est le Flux.

Les points de la mer situés en C et en D, à peu près à la même distance de la Lune que le centre de la Terre, sont attirés sensiblement comme ce centre, et, par leur communication avec le flux qu'elles concourent à former, elles se dépriment, et abandonnent les rivages qu'elles avaient recouverts. C'est le Reflux.

Il résulte de là que dans l'intervalle du passage de la Lune au méridien d'un lieu, ce point aura passé successivement par les divers états que nous offre le grand cercle ABCD dont le plan passe par le centre de la Terre et celui de la Lune.

Cet intervalle est un peu variable. Sa durée moyenne est de $24^h\ 50^m\ 28^s$, à peu près 25 heures. Dans cet intervalle, il y aura deux fois haute mer. — Mais la haute mer telle que B n'est pas aussi élevée que la haute mer en A.

L'attraction solaire exerce aussi sur le phénomène des marées une influence analogue à celle de la Lune ; mais elle est moindre à cause du grand éloignement du Soleil. C'est à midi et à minuit, heures du passage du Soleil au méridien, qu'il soulève le plus les eaux de la mer, et celles-ci s'abaissent au contraire à six heures du soir

et six heures du matin.

Indépendamment des marées lunaires, il devrait donc y avoir 2 marées solaires par jour.

Dans les Syzygies, les deux astres passent en même temps au méridien. Leurs actions s'ajoutent, et l'on n'a que deux marées dont les intensités sont les sommes des effets produits par les deux astres.

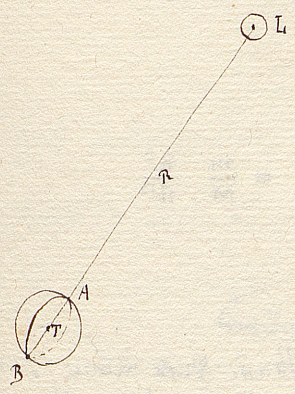
Dans les Quadratures, la haute mer de la marée lunaire a lieu en même temps que la basse mer de la marée solaire, et réciproquement. Par conséquent, la marée telle qu'on l'observe est la différence des deux marées partielles.

En général, on ne distingue que les marées lunaires. Mais elles sont augmentées dans les Syzygies et diminuées dans les Quadratures de tout l'effet produit par le soleil.

Dans les positions intermédiaires, les attractions des deux astres se composent, et celle du ☉ ne fait jamais qu'augmenter ou diminuer l'intensité de la marée lunaire.

Il en résulte qu'en général, les plus hautes marées ont lieu à l'époque des Syzygies, et les plus faibles, à celle des Quadratures.

Le calcul suivant rendra ce résultat évident, et de plus il permettra de conclure la masse de la Lune de l'observation des marées.



Soit R la distance du centre de la Lune à celui de la Terre.

L'attraction exercée sur l'unité de masse au centre de la Terre a pour expression

$$\frac{fm}{R^2}$$

m étant la masse de la Lune.

L'attraction exercée sur le point A a donc pour expression

$$\frac{fm}{(R-r)^2}$$

et la force qui produit la marée est

$$fm\left\{\frac{1}{(R-r)^2} - \frac{1}{R^2}\right\}$$

ou bien

$$\frac{fm}{R^2}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{r}{R}\right)^2} - 1\right\} = \frac{fm}{R^2}\left\{\left(1-\frac{r}{R}\right)^{-2} - 1\right\}$$

En développant, et négligeant les puissances de $\frac{r}{R}$ supérieures à la première, il vient

$$\frac{fm}{R^2}\cdot\frac{2r}{R} \quad \text{ou} \quad \frac{2fmr}{R^3}$$

En ne conservant que la même approximation, on trouverait la même valeur pour l'intensité de la force qui produit la marée au point B.

On voit donc que cette force varie en raison inverse du cube de la distance des centres; d'où il suit que cette force est plus grande quand la Lune est au périgée que quand elle est à l'apogée.

La force attractive du Soleil qui produit les marées aura de même pour expression

$$\frac{2fMr}{R'^3}$$

M étant la masse du ☉, R' la distance de son centre à celui de la Terre. Cette force est sensiblement constante, car les variations de la distance du ☉ à la Terre sont trop faibles pour que l'effet en soit appréciable sur les marées.

Soit a l'action de la Lune, A celle du Soleil.

Dans les syzygies, la force totale sera A+a, dans les quadratures, a − A.

On peut admettre que la hauteur dont la mer est soulevée au-dessus de son niveau moyen est proportionnelle à ces forces. — Or une série d'observations très-longues a montré que ces hauteurs sont entre elles comme 7 et à 3.

On aura donc

$$a + A : a - A :: 7 : 3$$

$$a : A :: 10 : 4$$

$$:: 5 : 2$$

$$\frac{a}{A} = \frac{2fmr}{R^3} : \frac{2fMr}{R'^3} = \frac{m}{M} \cdot \frac{R^3}{R'^3}$$

D'où

$$\frac{m}{M} \cdot \frac{R^3}{R'^3} = \frac{5}{2}$$

D'où l'on conclut le rapport de la masse de la Lune à celle du Soleil, et par suite, à celle de la Terre, car on connaît le rapport de ces deux dernières.

On a trouvé ainsi que le rapport des masses de la Lune et de la Terre est $\frac{1}{75}$.

D'autres méthodes, fondées sur l'examen des perturbations, et susceptibles d'une plus grande précision, ont donné $\frac{1}{88}$.

La position du Soleil et de la Lune par rapport à la Terre a une grande influence sur les marées. La théorie montre qu'en général, l'attraction soit du ☉ soit de la Lune sur les eaux de la mer, toutes choses égales d'ailleurs, atteint son maximum quand l'astre est dans le plan de l'équateur terrestre, et diminue rapidement quand la latitude

augmente. — Ainsi les marées des pleines et des nouvelles Lunes les plus rapprochées des Equinoxes sont en général les plus fortes de l'année, surtout quand il arrive que la Lune est en même temps à son Périgée. — Elles sont environ doubles des plus faibles, abstraction faite de la puissance et de la direction des Vents, qui peuvent augmenter ou diminuer sensiblement le phénomène.

L'instant de la Marée dans les Syzygies n'est pas, comme on pourrait le croire, à midi ou à minuit précis, heures du passage commun de la Lune et du ☉ au méridien. — Il y a des retards qui tiennent à la configuration des côtes, et qu'on nomme, pour chaque lieu, l'Etablissement du Port. — Le Retard est de $3^h 30^m$ à Brest, de 6^h à St. Malo, de $10^h 30^m$ à Dieppe.

On observe encore que la plus grande marée n'arrive pas le jour où elle est indiquée par le Calcul, mais 36 h. après.

Observons enfin que l'étendue des eaux doit contribuer à leur élévation, en favorisant leurs mouvements déterminés par l'attraction du Soleil et de la Lune. — Ainsi les marées sont presque insensibles dans la Méditerranée; elles le sont tout-à-fait dans la mer Caspienne et la mer Noire.

(Liouville, T. 9. : Delaunay, sur le Retard des Marées maximum).

Expression du Mouvement ascensionnel de la mer en fonction du Temps.

Considérons d'abord le mouvement produit par l'action seule de la Lune. Ce mouvement se composera d'une partie constante, qui sera la hauteur moyenne, et d'une partie variable, qui dépendra de la position de la Lune, et qui par conséquent sera fonction du Temps. Cette partie variable, étant périodique, pourra s'exprimer par un Sinus ou un Cosinus.

Soit donc a la hauteur moyenne de la mer dans le lieu pour lequel on veut calculer son mouvement, h sa hauteur pour une certaine position de la Lune. Posons

$$h = a + \mu \cos V$$

$\cos V$ étant un angle qui dépend de la position de la Lune, et μ un coefficient constant qui est la plus grande variation de hauteur, en plus ou en moins, de la valeur moyenne a.

Soit ε l'angle que le cercle horaire de la Lune fait à l'instant t. V sera une fonction de ε. .. appelons ζ la valeur de cet angle

ε au moment de la plus grande hauteur de la mer. — Nous connaissons quatre valeurs de la fonction v: car on doit avoir

$$\left\{\begin{array}{lll} h = a + \mu & \text{pour} & \varepsilon = \zeta \\ h = a - \mu & \text{"} & \varepsilon = \zeta + 90° \\ h = a + \mu & \text{"} & \varepsilon = \zeta + 180° \\ h = a - \mu & \text{"} & \varepsilon = \zeta + 270° \end{array}\right.$$

On voit donc que

$$\left\{\begin{array}{lll} \cos v = 1 & \text{quand} & \varepsilon - \zeta = 0 \\ \cos v = -1 & \text{"} & \varepsilon - \zeta = 90° \\ \cos v = 1 & \text{"} & \varepsilon - \zeta = 180° \\ \cos v = -1 & \text{"} & \varepsilon - \zeta = 270° \end{array}\right.$$

Donc

$$v = 2(\varepsilon - \zeta)$$

et

$$h = a + \mu \cos 2(\varepsilon - \zeta)$$

L'expérience montre que cette formule satisfait bien en effet au mouvement de la mer.

Comme le coefficient μ exprime la plus grande variation de hauteur, il est naturel de le supposer proportionnel à la force qui produit cette variation.

$$\mu = b \frac{mr}{R^3}$$

b étant le coefficient qui convient pour le port pour lequel on construit la formule.

Il faut maintenant exprimer en fonction du temps l'angle que fait la Lune avec le méridien.

La Connaissance des Temps donne pour tous les jours l'Æ de la Lune. Soit φ cette Æ. — Il suffit de connaître l'angle que la ligne des Equinoxes fait avec le méridien au moment pour lequel on calcule la hauteur de la mer. — Soit t le temps sidéral, compté à partir de la ligne des Equinoxes, jusqu'au méridien, n la vitesse de Rotation de la Terre:

$$\varepsilon = nt - \varphi$$

D'où

$$h = a + b \frac{mr}{R^3} \cos 2(nt - \varphi - \zeta)$$

Le mouvement de la mer occasionné par le Soleil s'exprime par une formule semblable.

$$\frac{b'Mr}{R'^3} \cos 2(nt - \varphi' - \zeta')$$

D'où

$$H = a + \frac{bmr}{R^3} \cos 2(nt - \varphi - \zeta) + \frac{b'Mr}{R'^3} \cos 2(nt - \varphi' - \zeta')$$

---

on peut par cette formule, calculer l'heure de la plus grande Marée en hauteur et en dépression.

Pour cela, il suffit de poser

$$\frac{dH}{dt} = 0.$$

φ et φ' varient avec le temps. Leurs valeurs dépendent donc du temps que l'on cherche. Mais ce temps est à peu-près connu, de sorte qu'on connaîtra à-peu-près les valeurs de φ et de φ'. Et, comme ces quantités varient lentement, on pourra leur supposer des valeurs approximatives, et les regarder comme constantes.

on a alors en différentiant

$$\frac{bm}{R^3} \sin 2(nt-\varphi-\zeta) + \frac{b'M}{R'^3} \sin 2(nt-\varphi'-\zeta') = 0$$

$$\frac{bm}{R^3} \sin 2(nt-\varphi-\zeta) + \frac{b'M}{R'^3} \sin 2\left\{nt-\varphi-\zeta-(\varphi-\varphi'+\zeta-\zeta')\right\} = 0$$

Développant

$$\frac{bm}{R^3} \sin 2(nt-\varphi-\zeta) + \frac{b'M}{R'^3}\left\{\sin 2(nt-\varphi-\zeta)\cos(\varphi-\varphi'+\zeta-\zeta') + \cos 2(nt-\varphi-\zeta)\sin 2(\varphi-\varphi'+\zeta-\zeta')\right\} = 0$$

Posant

$$\varphi-\varphi'+\zeta-\zeta' = \psi$$

$$\left(\frac{bm}{R^3} + \frac{b'M}{R'^3}\cos 2\psi\right)\sin 2(nt-\varphi-\zeta) + \frac{b'M}{R'^3}\sin 2\psi \cos 2(nt-\varphi-\zeta) = 0$$

$$\operatorname{tg} 2(nt-\varphi-\zeta) = -\frac{\frac{b'M}{R'^3}\sin 2\psi}{\frac{bm}{R^3}+\frac{b'M}{R'^3}\cos 2\psi}.$$

Le temps t tiré de cette formule fera connaître l'instant de la plus haute marée Luni-Solaire.

---

astronomie.

—

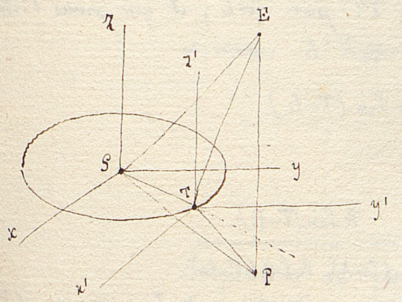
Cours de Mr. Faye, 1852-53.

—

[illegible]

Parallaxe et aberration.

Supposons que l'on rapporte les astres à trois axes de coordonnées. — Plaçons l'origine au centre du Soleil. Prenons pour plan des xy celui de l'orbite terrestre. Les coordonnées relatives à ces axes seront des coordonnées héliocentriques. Soient $x\ y\ z$ celles d'une étoile E.



Sx est supposé la ligne des équinoxes.
Désignons par λ la latitude ESP de l'étoile, et par L sa longitude xSP, observées du Soleil.
Soit enfin $SE = d$.

La longitude et la latitude peuvent se déterminer directement, tandis que x, y, z ne peuvent l'être. Mais on peut chercher une relation entre $x\ y\ z$, L et λ. On aura en effet

$$(1)\quad \begin{cases} x = d \cos\lambda \cos L \\ y = d \cos\lambda \sin L \\ z = d \sin\lambda \end{cases}$$

Ces trois équations donnent les valeurs des coordonnées rectangulaires de l'étoile en fonction de la latitude et de la longitude de l'étoile observées du Soleil ; et, comme les observations ne peuvent se faire que de la surface de la Terre, il faut avoir $x\ y\ z$ en fonction des quantités d', L', λ' correspondantes à d, L, λ.

En transportant les axes parallèlement à eux-mêmes de façon que l'origine vienne en T, on aura évidemment

$$(2)\quad \begin{cases} x' = d' \cos\lambda' \cos L' \\ y' = d' \cos\lambda' \sin L' \\ z' = d' \sin\lambda' \end{cases}$$

Eq. auxquelles il faut joindre

$$(3)\quad \begin{cases} x' = x - \alpha \\ y' = y - \beta \\ z' = z \end{cases}$$

α et β sont les coordonnées héliocentriques de la Terre.

Soit T l'angle TSx, R la distance de la Terre au Soleil. on aura

$$\begin{cases} \alpha = R \cos T \\ \beta = R \sin T \end{cases}$$

donc

$$(4) \quad \begin{cases} x' = x - R \cos T \\ y' = y - R \sin T \\ z' = z \end{cases}$$

En tout, neuf équations, (1) (2) et (4).

Si dans (4) on remplace $x' y' z'$ par leurs valeurs (2), et $x y z$ par leurs valeurs (1), il viendra

$$(5) \quad \begin{cases} d' \cos\lambda' \cos L_1' = d \cos\lambda \cos L_1 - R \cos T \\ d' \cos\lambda' \sin L_1' = d \cos\lambda \sin L_1 - R \sin T \\ d' \sin\lambda' = d \sin\lambda \end{cases}$$

Multiplions maintenant la 1ère de ces Eq. (5) par $\cos L_1$, la seconde par $\sin L_1$, et ajoutons : il viendra

$$(6) \quad d' \cos\lambda' \cos(L_1' - L_1) = d \cos\lambda - R \cos.(T - L_1).$$

Si nous multiplions la 1ère par $\sin L_1$ et la 2e. par $\cos L_1$, et que nous retranchions, nous aurons

$$(7) \quad d' \cos\lambda' \sin(L_1' - L_1) = R \sin(T - L_1)$$

divisons (6) et (7) membre à membre

$$(8) \quad \operatorname{tg}(L_1' - L_1) = \frac{R \sin(T - L_1)}{d \cos\lambda - R \cos(T - L_1)}$$

or les observations donnent L_1' qui est à très peu près égal à L_1. donc $L_1' - L_1$ est fort petit. — d'autre part, d est très grand relativement à R. donc on pourra négliger les puissances supérieures de $\frac{R}{d}$. — Nous aurons alors successivement

$$\operatorname{tg}(L_1' - L_1) = \frac{\frac{R}{d} \sin(T - L_1)}{\cos\lambda - \frac{R}{d} \cos(T - L_1)} = \frac{\frac{R}{d} \frac{\sin(T - L_1)}{\cos\lambda}}{1 - \frac{R}{d} \frac{\cos(T - L_1)}{\cos\lambda}} = \frac{R}{d} \frac{\sin(T - L_1)}{\cos\lambda} \left(1 + \frac{R}{d} \frac{\cos(T - L_1)}{\cos\lambda}\right)$$

$$\operatorname{tg}(L_1' - L_1) = \frac{R}{d} \sec.\lambda \sin(T - L_1)$$

toujours en négligeant $\left(\frac{R}{d}\right)^2$. — d'où enfin

$$(9) \quad L_1' - L_1 = \frac{R}{d} \sec\lambda \sin(T - L_1)$$

De même que nous avons obtenu des formules (5) la différence des longitudes observées du centre du Soleil et du centre de la Terre, de même nous pourrons obtenir la différence des latitudes.

Multiplions en effet la 1ère de l'équation (6) par $\cos \frac{1}{2}(L_1' - L_1)$, l'Eq. (7) par $\sin \frac{1}{2}(L_1' - L_1)$ et ajoutons : si nous remarquons que l'on a en général

$$\operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} \frac{a}{2} + \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} \frac{a}{2} = \left(\operatorname{Cos}^2 \frac{a}{2} - \operatorname{Sin}^2 \frac{a}{2}\right)\operatorname{Cos} \frac{a}{2} + \left(2 \operatorname{Sin} \frac{a}{2} \operatorname{Cos} \frac{a}{2}\right)\operatorname{Sin} \frac{a}{2} = \operatorname{Cos}^3 \frac{a}{2} + \operatorname{Sin}^2 \frac{a}{2} \operatorname{Cos} \frac{a}{2} = \operatorname{Cos} \frac{a}{2}$$

il viendra

$$d' \operatorname{Cos} \lambda' \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(L'-L) = d \operatorname{Cos} \lambda \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(L'-L) - R \operatorname{Cos}(T-L) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(L'-L) + R \operatorname{Sin}(T-L) \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(L'-L)$$

$$d' \operatorname{Cos} \lambda' = d \operatorname{Cos} \lambda - R \operatorname{Cos}(T-L) + R \operatorname{Sin}(T-L) \operatorname{Tg} \tfrac{1}{2}(L'-L)$$

(10) $$d' \operatorname{Cos} \lambda' = d \operatorname{Cos} \lambda - K$$

en posant

$$K = R \operatorname{Cos}(T-L) - R \operatorname{Sin}(T-L) \operatorname{Tg} \tfrac{1}{2}(L'-L)$$

Si l'on combine maintenant la 3e des Equations (5) avec l'Eq. (10), on aura successivement

$$d' \operatorname{Sin} \lambda' \cdot (d \operatorname{Cos} \lambda - K) = d \operatorname{Sin} \lambda \cdot d' \operatorname{Cos} \lambda'$$

$$d d' (\operatorname{Sin} \lambda' \operatorname{Cos} \lambda - \operatorname{Sin} \lambda \operatorname{Cos} \lambda') = K d' \operatorname{Sin} \lambda' = K d \operatorname{Sin} \lambda \quad \Big\} \text{ d'où } \operatorname{Sin}(\lambda'-\lambda) = \frac{K \operatorname{Sin} \lambda}{d'}$$

$$d' \operatorname{Cos} \lambda' \operatorname{Cos} \lambda = d \operatorname{Cos}^2 \lambda - K \operatorname{Cos} \lambda$$

$$d' \operatorname{Sin} \lambda' \operatorname{Sin} \lambda = d \operatorname{Sin}^2 \lambda \quad \Big\} \text{ d'où } \operatorname{Cos}(\lambda'-\lambda) = \frac{d - K \operatorname{Cos} \lambda}{d'}$$

et partant

$$\operatorname{Tg}(\lambda'-\lambda) = \frac{K \operatorname{Sin} \lambda}{d - K \operatorname{Cos} \lambda}$$

et, comme λ' diffère peu de λ

$$\lambda' - \lambda = \frac{\frac{K}{d} \operatorname{Sin} \lambda}{1 - \frac{K}{d} \operatorname{Cos} \lambda} = \frac{K}{d} \operatorname{Sin} \lambda \left(1 + \frac{K}{d} \operatorname{Cos} \lambda\right)$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{K}{d} \operatorname{Sin} \lambda \qquad \left(\text{en négligeant } \frac{K^2}{d^2}\right).$$

Remplaçant K par sa valeur, en ne conservant que le premier terme, puisque $\operatorname{Tg} \frac{1}{2}(L'-L)$ est très petit et que, multiplié par $\frac{\operatorname{Sin} \lambda}{d}$, il donnera un Infiniment petit du 2e ordre :

(11) $$\lambda' - \lambda = \frac{R}{d} \operatorname{Sin} \lambda \operatorname{Cos}(T-L)$$

Telles sont les expressions de la Parallaxe annuelle en Longitude et en Latitude.

La première est nulle quand $L'-L = 0$ ou $= 180°$, c.à.d. aux Epoques des conjonctions et des oppositions. alors en effet la parallaxe doit se porter tout entière sur la Latitude. — or, comme dans ce cas $T = L$, on a

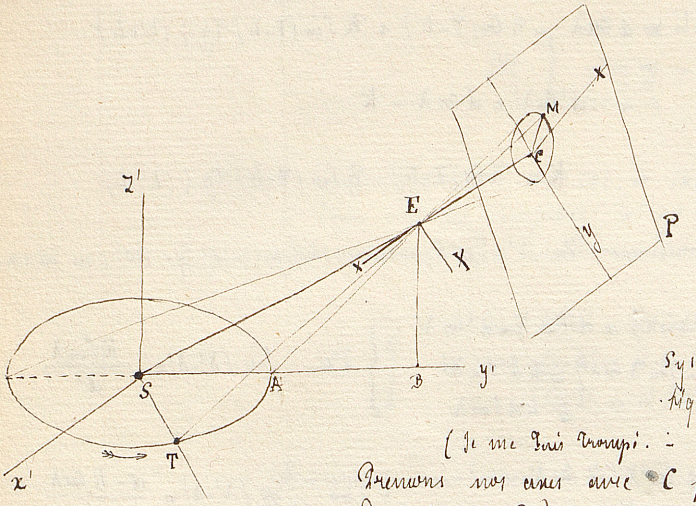
$$\lambda' - \lambda = \frac{R}{d} \operatorname{Sin} \lambda$$

c'est le maximum de $\lambda' - \lambda$.

La parallaxe en Latitude, à son tour, devient nulle quand $T-L = \pm 90°$. C'est le cas où le ☉ est en quadrature avec l'astre, et où le Rayon vecteur héliocentrique de celui-ci devient perp. au Rayon vecteur de la Terre. — Le maximum de $L'-L$ devient

$$L'-L = \pm \frac{R}{d} \operatorname{Sec} \lambda .$$

Pendant le mouvement annuel de la Terre, le Rayon visuel mené de la Terre à l'astre décrira un cône ayant E pour sommet, et qui coupera la sphère suivant une ellipse qu'on peut considérer comme plane.



Imaginons trois axes ayant leur origine en E, au lieu vrai de l'étoile vue du Soleil, l'axe des y étant dans le plan Z'Sy' et perp. à SE, l'axe des x étant perp. à ce plan, et parallèle à Sx'. Ces deux axes, Ey, Ex, seront parallèles au plan Ey'. T à la sphère céleste. — Soient x y les coordonnées de M, position de l'étoile vue de la Terre T.

Sy' étant la projection de SE sur l'écliptique, il est clair que $ESy' = \lambda$. —

(Je me suis trompé. — Le lieu vrai de l'étoile vue du Soleil est C. Prenons nos axes avec C pour origine : ils seront tous deux dans le plan P).

Remarquons que la ligne cx est parallèle à Sx' et par suite au plan de l'écliptique. Tous les points de cx ont pour latitude λ, tant qu'on ne s'éloignera pas trop du point C, de façon que la sphère sera confondue avec le plan tangent. — Il est donc clair que l'arc a pour l'y du point M est l'arc de grand cercle qui mesure $\lambda'-\lambda$, et que, si l'on pose $SC = 1$, on aura

$$y = \lambda' - \lambda$$

L'x de M sera l'arc du petit cercle cx compris entre les deux méridiens célestes qui déterminent L et L'; cet arc n'est pas égal à L'-L mais à cette quantité multipliée par $\cos\lambda$

$$x = (L' - L)\cos\lambda$$

Mais nous avons trouvé

$$L' - L = \frac{R}{D}\sec\lambda \sin(T - L) \qquad \lambda' - \lambda = \frac{R}{d}\sin\lambda\cos(T - L)$$

Simplement

$$x = \frac{R}{d}\sin(T - L)$$

$$y = \frac{R}{d}\sin\lambda\cos(T - L)$$

Éliminant T

$$\frac{y^2}{\sin^2\lambda} + x^2 = \frac{R^2}{d^2}$$

Équation d'une ellipse.

Si $\lambda = 0$, l'ellipse se réduit à une ligne droite.

Si $\lambda = 90°$, on a un cercle.

Rem. — Tout cela peut se voir géométriquement. Car si l'on imagine le cône du 2d. degré dont E est le sommet et l'orbite de la Terre est la base, le plan P le coupe évidemment suivant une ellipse, dont le grand axe est parallèle à l'écliptique. Ull.

Nous avons trouvé les deux formules

$$L' - L = -\frac{R}{d} \sec\lambda \sin(T-L)$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{R}{d} \sin\lambda \cos(T-L)$$

Considérons la première. Elle renferme deux inconnues, $\frac{R}{d}$ et L. Il faut donc deux observations pour les déterminer. — Nous observerons à deux époques où la parallaxe $L'-L$ atteindra son maximum positif ou négatif. Choisissons l'époque où $T-L = 90°$ et celle où $T-L = 270°$. alors nous aurons

$$L'_1 - L = -\frac{R}{d} \sec\lambda$$

$$L'_2 - L = \frac{R}{d} \sec\lambda$$

D'où l'on peut déduire $\frac{R}{d}$ et L. — λ n'est pas connu, mais on peut le remplacer par λ'.

Mais ce n'est pas ainsi qu'aujourd'hui l'on résout la question. On tient compte de toutes les observations, et l'on a plusieurs équations de condition que l'on traite par la méthode des moindres carrés. — On tirera de toutes les équations la valeur de $\frac{R}{d}$. Toutes les valeurs ainsi obtenues ont l'avantage de montrer que le phénomène suit bien la loi géométrique exprimée par la formule.

Pour toutes les étoiles observées, on a toujours trouvé $\frac{R}{d} < 1''$. — Pour la 61e du Cygne, $\frac{R}{d} = 0'',37$, c.à.d. que l'orbite de la Terre serait vue de l'Etoile sous un angle de 0'',37. — Pour avoir la valeur numérique de la distance, il faut diviser (?) 0'',37 par $\frac{1}{206265}$. on a

$$d = \frac{206265}{0,37} R.$$

En faisant le calcul, on trouve $d = 592000 R$: — R étant toujours le rayon de l'orbite terrestre.

Voici le tableau des parallaxes qu'on connaît

	$\frac{R}{d} = \pi$ = Parallaxe	incertitude	d	incertitude
α Centaure	0'',91	± 0,07	227000 R	± $\frac{1}{13}$ d.
61e Cygne	0 ,37	± 0,02	592000	± $\frac{1}{18}$
Sirius	0 ,23			
α Lyre	0 ,21	± 0,04		
Polaire	0 ,11	± 0,01		
La Chèvre	0 ,05	± 0,20		

Le degré d'approximation s'obtient au moyen des équations de condition.

Il y a là une conclusion importante pour l'astronomie : Notre système est il isolé dans le monde ? — L'action des étoiles peut être négligée en égard au mouvement relatif.

Les anciens objectaient aux Pythagoriciens que les étoiles devaient décrire des ellipses si la Terre tournait autour du Soleil, et ils ne voyaient pas ces ellipses. Tycho fit la même objection au système de Copernic.

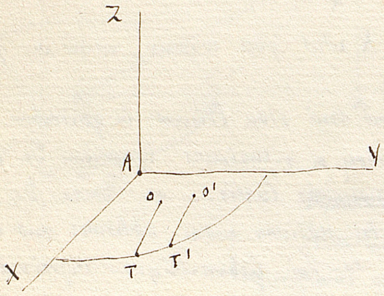
Les astronomes se servent pour ces grandes distances d'une mesure qui est l'espace que la lumière parcourt en un an. — Elle parcourt le

rayon de l'orbite terrestre en $8^m\,17^s,8$ ou $497^s,8$. Donc qu'en un an, elle parcourt 63000 rayons de l'orbite terrestre. — Elle met 3 ans à nous venir d'α du Centaure, et 9 ans à venir de la 61e du Cygne.

Par suite de la vitesse non infinie de la lumière, nous ne voyons pas les astres dans leur véritable position. — Le mouvement de la Terre combiné avec la vitesse de la lumière donne lieu à l'aberration.

Exemple d'un boulet de canon qui traverse un navire.

Il en est de même d'un rayon de lumière qui tombe dans l'œil.



Prenons 3 axes rectangulaires, A étant le centre du Soleil; supposons l'orbite terrestre dans le plan des XY, et AX la ligne des équinoxes à partir de laquelle se comptent les longitudes.

Soit TO la lunette dirigée vers la position apparente de l'astre. $l = TO$ = la longueur de la lunette.

Soient $x\ y\ z$ les coordonnées du point T.

Soient $X\ Y\ Z$ celles du point O.

Soient enfin $\alpha\ \beta\ \gamma$ celles du même point O relativement à trois axes parallèles aux premiers, et emportés par le point T.

On aura

$$\alpha = l \cos\lambda' \cos L'$$
$$\beta = l \cos\lambda' \sin L'$$
$$\gamma = l \sin\lambda'$$

et partant

$$X = x + l \cos\lambda' \cos L'$$
$$Y = y + l \cos\lambda' \sin L'$$
$$Z = z + l \sin\lambda' \qquad \text{et } z = 0.$$

Soit dt le temps employé par la lumière pour venir de l'objectif O à l'œil de l'observateur. T est venu en T' et a pris les coordonnées $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$; et l'on a évidemment, si v est la vitesse de la lumière, $OT' = vdt$.

Les projections de OT' sur les trois axes sont, OT' étant visiblement la vraie direction dans laquelle on devrait voir l'astre,

$$vdt \cos\lambda \cos L$$
$$vdt \cos\lambda \sin L$$
$$vdt \sin\lambda$$

Maintenant, la différence des coordonnées de deux points O et T' relativement à un axe qcq. est égale toujours à la projection sur cet axe de la ligne qui les joint. Donc

$$x + l \cos\lambda' \cos L' - (x+dx) = vdt \cos\lambda \cos L$$
$$y + l \cos\lambda' \sin L' - (y+dy) = vdt \cos\lambda \sin L$$
$$z + l \sin\lambda' - (z+dz) = vdt \sin\lambda$$

ou

$$l \cos\lambda' \cos L' = vdt \cos\lambda \cos L + dx$$
$$l \cos\lambda' \sin L' = vdt \cos\lambda \sin L + dy$$
$$l \sin\lambda' = vdt \sin\lambda + dz$$

Ainsi, si l'on pose toujours $TA = R$ et $TAX = T$, on a

$$x = R \cos T$$
$$y = R \sin T$$
$$z = 0$$

d'où

$$dx = -R \sin T \frac{dT}{dt}\, dt$$
$$dy = R \cos T \frac{dT}{dt}\, dt$$
$$dz = 0$$

et, appelant u la vitesse linéaire de la Terre,

$$dx = -u \sin T\, dt$$
$$dy = u \cos T\, dt$$
$$dz = 0$$

Substituant dans les dernières équations de la page précédente, et divisant par dt, on a

$$\frac{l}{dt} \cos\lambda' \cos L' = v \cos\lambda \cos L - u \sin T$$
$$\frac{l}{dt} \cos\lambda' \sin L' = v \cos\lambda \sin L + u \cos T$$
$$\frac{l}{dt} \sin\lambda' = v \sin\lambda$$

Multiplions la 1re par $\cos L$, la 2e par $\sin L$ et ajoutons ;
" " $\sin L$, " " $\cos L$ " retranchons ; } il vient

$$\frac{l}{dt} \cos\lambda' \cos(L'-L) = v \cos\lambda - u \sin(T-L)$$
$$\frac{l}{dt} \cos\lambda' \sin(L'-L) = u \cos(T-L)$$

d'où

$$\mathrm{tg}(L'-L) = \frac{u \cos(T-L)}{v \cos\lambda - u \sin(T-L)}$$
$$= \frac{u}{v} \cdot \frac{\cos(T-L)}{\cos\lambda - \frac{u}{v}\sin(T-L)}$$
$$= \frac{u}{v} \sec\lambda \cos(T-L) \frac{1}{1 - \frac{u}{v}\frac{\sin(T-L)}{\cos\lambda}}$$
$$= \frac{u}{v} \sec\lambda \cos(T-L) \left\{1 + \frac{u}{v}\frac{\sin(T-L)}{\cos\lambda}\right\}$$

$$L' - L = \frac{u}{v} \sec\lambda \cos(T-L)$$

(en négligeant $\frac{u^2}{v^2}$ qui est très-petit).

Cherchons de même $\lambda' - \lambda$. — Il suffit pour cela d'employer identiquement le même artifice qui a déjà servi p. 232–233, en prenant des deux formules qui précèdent la valeur de $\mathrm{tg}(L'-L)$ et leur joignant $\frac{l}{dt}\sin\lambda' = v \sin\lambda$. On trouvera

$$\lambda' - \lambda = \frac{u}{v} \sin\lambda \sin(T-L)$$

Si maintenant, comme dans le cas des parallaxes, on imagine deux axes des ξ et des η placés sur le plan tangent à la sphère céleste, et ayant leur origine au lieu de l'étoile vue du Soleil, on en aura encore de même

$$x = (L'-L_1)\cos\lambda$$
$$y = \lambda' - \lambda$$

Remplaçant $L'-L$ et $\lambda'-\lambda$ par leurs valeurs, et éliminant T, on a

$$\frac{y^2}{\sin^2\lambda} + x^2 = \frac{u^2}{v^2}$$

équation d'une ellipse, dont le grand axe est constant pour toutes les étoiles.

Montrons maintenant comment on peut déduire delà la vitesse de la lumière.

Prenons l'équation

$$L'-L = \frac{u}{v}\sec\lambda\cos(T-T_1)$$

on fait deux observations quand $L'-L$ est maximum, c. a d. quand $\pm$ de $T-T_1$ est nul ou $=180°$. — on trouve

$$\frac{u}{v} = 20'',445$$

ou

$$\frac{u}{v} = 20,445 \times \frac{1}{206265}$$

$$v = 10000.u \quad \text{environ.}$$

Or la vitesse de la terre peut se calculer aisément. on a $u = 7^{\text{lieues}},7$ d'où $v = 77000$ lieues.

Nous ne nous sommes servis que de deux observations: — on en prend 2 ou 300.

La valeur $\frac{u}{v} = 20'',445$ est soumise à une incertitude de $\pm 0'',011$. on connaît ainsi la vitesse de la lumière à $\frac{1}{100}$ près.

Toutes les étoiles donnent la même valeur. — Il faut en conclure que la vitesse de leur lumière est la même, quelles que soient la grandeur et la couleur de l'étoile.

Cherchons à rattacher la théorie précédente de l'aberration à celle des retards observés dans les éclipses des satellites de Jupiter.

Nous avons trouvé pour l'aberration en longitude

$$\mathrm{Tg}(L'-L_1) = \frac{u}{v}\sec\lambda\cos(T-T_1)$$

L_1 et λ sont les coordonnées de l'étoile vue sans aberration, comme si la terre était immobile, L_1' est sa longitude apparente. — Comme L_1' et L_1 diffèrent très-peu, on peut remplacer la tangente par l'angle, et, en mettant les unités convenables en évidence, écrire

$$L_1'-L_1 = \frac{u}{v\sin 1''}\sec\lambda\cos(T-T_1)$$

$\frac{u}{v\sin 1''}$ exprime des secondes. C'est la constante de l'aberration. — Posons

$$\frac{u}{v\sin 1''} = \mu \qquad\qquad \mu = 20'',445 \quad \pm 0'',011$$

Pour avoir la signification nette de μ, il faut examiner comment se compose sa valeur. — u est la vitesse linéaire de la terre, qu'on ne connaît pas immédiatement. — appelons ω sa vitesse angulaire. On aura

$$u = R\omega \sin 1''$$

ω est connu avec une précision infinie, pour R c'est autre chose, il y a quelque incertitude. — Substituons, nous aurons

$$\mu = \frac{R\omega}{V}$$

en sorte que nous tombons sur l'équation

$$\frac{\mu}{\omega} = \frac{R}{V}$$

$\frac{R}{V}$, quotient d'une longueur par une vitesse, exprime en secondes le temps que met la lumière à parcourir la distance R. — Nous voyons que les observations astronomiques ne nous donneront pas V, mais $\frac{R}{V}$.

Calculons ce temps : c'est celui que Roemer a tiré des observations des satellites de Jupiter. — ω est facile à trouver. on sait que la Terre a une vitesse diurne angulaire de $59' \, 8'',33$. Donc, par seconde,

$$\omega = \frac{59' \, 8'',33}{86400} = 0'',0410613$$

d'où

$$\frac{\mu}{\omega} = \frac{R}{V} = 498^s \text{ ou plus exactement } = 497^s,8$$

c'est le temps employé par la lumière pour parcourir R : c'est ce que devait donner l'observation des satellites de Jupiter.

Roemer, qui a signalé la discordance de l'époque prédite des éclipses avec l'époque observée, avait trouvé $8^m \, 17^s,8$, le temps exact.

Lorsque Delambre reprit ces calculs, il trouva $8^m \, 13^s$. — C'est à l'aide de ce nombre qu'il avait conclu la valeur de μ, $\mu = 20'',225$ ou bien de $20'',45$.

Puisque la lumière emploie un temps sensible pour parcourir les espaces célestes, il en résulte pour les planètes un phénomène curieux. Il n'existe pas, sauf deux points de la voûte céleste à chaque instant (ceux où pour les étoiles la tangente à l'orbite terrestre perce cette voûte) une seule planète, un seul astre qui soit réellement à la place où on les voit. — Pour les planètes surtout, le rayon de lumière qui vient à l'œil était parti à une époque antérieure de $\frac{d}{R} \, 8^m \, 18^s$. ainsi nous voyons le soleil dans la position qu'il occupait $8^m \, 18^s$ plus tôt.

Pour avoir les positions réelles, il suffit de retrancher de L' et de λ' les variations de ces coordonnées pendant $8^m \, 18^s$: — ou pendant un autre temps dépendant de la distance de l'astre à la Terre. Soient $\Delta L'$ et $\Delta \lambda'$ ces variations pour 1^s. Il suffira de les multiplier par le nombre de secondes, et de retrancher de L' et λ' : on aura la position vraie.

Pour le soleil en particulier, puisqu'il décrit en apparence le cercle que la Terre décrit en réalité, il est évident que le soleil, dans sa route annuelle, nous paraît toujours en retard précisément de la quantité μ. C'est elle qu'il faut ajouter à sa longitude observée pour avoir sa longitude vraie.

De l'équation

$$\frac{V}{R} = \frac{\omega}{\mu}$$

on déduit

$$\mu = \omega : \frac{V}{R} = \omega . \frac{R}{V}$$

Si donc on multiplie la vitesse angulaire de la Terre par $8^m \, 18^s$, on en

résulte que μ n'est autre chose que l'espace angulaire parcouru par la Terre en $8^m\ 18^s$.

Delà cette nouvelle interprétation de μ :

C'est le déplacement angulaire du Soleil pendant le temps que met la lumière à nous arriver de cet astre.

Examinons maintenant jusqu'à quel point cette théorie peut être confirmée par des phénomènes purement physiques.

Autrefois, à l'époque où la science s'est renouvelée, on a cherché à déterminer la vitesse de la lumière non pas par l'astronomie, mais comme simple objet de curiosité.

Expérience de Galilée.

Moyen de Descartes par les éclipses de lune.

Expériences de Fizeau. – Résultat : 80000 lieues de 4000^m.

Afin d'apprécier la valeur de ces résultats, il est nécessaire de voir avec quelle approximation nous connaissons astronomiquement $V = 77000^l$.

L'incertitude est une fonction de R et de μ : car on a

$$V = \frac{R\omega}{\mu}$$

et ω est parfaitement connu. Nous connaissons $\pm\delta R$ et $\pm\delta\mu$: il en faut déduire l'incertitude de μ V.

$$dV = \frac{\omega}{\mu}dR - \frac{R\omega}{\mu^2}d\mu$$

$$dV = \frac{V}{R}dR - \frac{V}{\mu}d\mu$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dR}{R} - \frac{d\mu}{\mu}$$

$\frac{dR}{R}$ est l'incertitude de R exprimée en parties de R ; de même les autres.

Le calcul des probabilités montre que la quantité $\frac{dV}{V}$ ou l'erreur à craindre sur V est la racine de la somme des carrés des deux autres

$$\frac{\delta V}{V} = \sqrt{\left(\frac{\delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\delta\mu}{\mu}\right)^2}$$

Ici, nous pouvons mettre des nombres : car nous connaissons R et δR. R nous est donné par la formule de parallaxe

$$\frac{r}{R} = 8'',57 \quad (\pm 0'',04)$$

R est donc connu avec une erreur possible $\frac{0'',04}{8'',57}$ ou $\frac{1}{200}$. Quant à $\frac{d\mu}{\mu}$, nous savons que $\mu = 20'',445 \pm 0'',011$.

$$\frac{\delta V}{V} = \sqrt{\left(\frac{1}{200}\right)^2 + \left(\frac{1}{2000}\right)^2} = \frac{1}{200} \text{ à peu près.}$$

Reste à savoir si les expériences de M. Fizeau peuvent donner une plus grande approximation. – Si cela était, on pourrait en déduire une distance plus exacte de la Terre au Soleil.

Employons maintenant la marche synthétique : — et supposons, pour plus de simplicité, que l'orbite de la Terre soit un cercle parcouru d'un mouvement uniforme.

Ne considérons d'abord que la Parallaxe :

Théorème I.

La parallaxe annuelle a pour effet de nous faire voir l'Étoile se déplacer comme si l'orbite de la Terre s'y trouvait transportée parallèlement à elle-même, et que l'Étoile la décrivît dans le sens direct.

C'est une conséquence des lois du mouvement relatif.

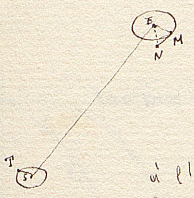
Tel serait le mouvement de l'Étoile si la vitesse de la Lumière était infinie. Mais nous savons qu'elle est comparable à celle de la Terre, et que l'aberration a pour effet d'abaisser un astre dans le sens de la Tangente à l'orbite Terrestre : donc

Théorème II.

L'aberration seule aurait pour effet de déplacer l'Étoile dans le sens du mouvement de la Terre, et de lui faire décrire, autour de son lieu Géocentrique vrai ~~apparent~~, un cercle parallèle à l'Écliptique, de manière que le lieu Géoc. apparent et le lieu vrai sont sur un arc de Grand cercle passant par le point du ciel vers lequel la Terre se dirige actuellement.

Il résulte de là la Règle suivante :

Prenez le lieu Héliocentrique de l'Étoile pour centre de l'orbite Terrestre, transportée parallèlement à elle-même. Si la Terre est en T, menez EM parallèle à ST, M sera la position Géocentrique vraie de l'Étoile. Menez MN Tangente à l'orbite parallactique, et égale au Rayon du cercle d'aberration : N sera la position Géocentrique vraie.



Donc :

Théorème III.

L'effet combiné de la Parallaxe annuelle et de l'aberration est de faire décrire à l'Étoile un cercle parallèle à l'Écliptique, et dont le Rayon EN est égal à la Racine carrée de la Somme des carrés des deux autres Rayons EM et MN.

Maintenant, ce cercle est vu de la Terre plus ou moins obliquement, suivant que l'Étoile elle-même se trouve plus ou moins rapprochée du plan de l'Écliptique. Donc nous voyons en réalité une Ellipse plus ou moins aplatie.

L'aberration agit donc comme si elle amplifiait simplement l'orbite parallactique.

Analytiquement, on arrive aisément au même Résultat.

En effet, on a trouvé :

pour la Parallaxe $L'-L = \pi \operatorname{Sec}\lambda \operatorname{Sin}(T-L)$

" l'aberration $L'-L = \mu \operatorname{Sec}\lambda \operatorname{Cos}(T-L)$

et de même

Par. $\lambda'-\lambda = \pi \operatorname{Sin}\lambda \operatorname{Cos}(T-L)$

aberr. $\lambda'-\lambda = -\mu \operatorname{Sin}\lambda \operatorname{Sin}(T-L)$

Donc déjà le mouvement parallactique et le mouvement d'aberration ne diffèrent que par le changement d'un Sinus en Cosinus, et par suite, ont lieu en faisant un angle de 90°.

Transformons. — La différence définitive entre la Longitude apparente L' et la Longitude vraie L est la somme des deux précédentes, et a pour valeur :

$$L_1' - L_1 = \pi \operatorname{Sec}\lambda \operatorname{Sin} T \operatorname{Cos} L_1 - \pi \operatorname{Sec}\lambda \operatorname{Sin} L_1 \operatorname{Cos} T + \mu \operatorname{Sec}\lambda \operatorname{Cos} T \operatorname{Cos} L_1 + \mu \operatorname{Sec}\lambda \operatorname{Sin} T \operatorname{Sin} L_1$$

ou

$$L_1' - L_1 = \operatorname{Sec}\lambda \operatorname{Sin} T (\pi \operatorname{Cos} L_1 + \mu \operatorname{Sin} L_1) - \operatorname{Sec}\lambda \operatorname{Cos} T (\pi \operatorname{Sin} L_1 - \mu \operatorname{Cos} L_1)$$

Posons

$$\pi \operatorname{Cos} L_1 + \mu \operatorname{Sin} L_1 = m \operatorname{Cos}\varphi$$

$$\pi \operatorname{Sin} L_1 - \mu \operatorname{Cos} L_1 = m \operatorname{Sin}\varphi$$

d'où

$$m^2 = \pi^2 + \mu^2$$

on aura

$$L_1' - L_1 = m \operatorname{Sec}\lambda \operatorname{Sin}(T - \varphi)$$

on aurait de même pour la différence totale des latitudes

$$\lambda' - \lambda = m \operatorname{Sin}\lambda \operatorname{Cos}(T - \varphi)$$

Remplaçant dans les formules

$$x = (L_1' - L_1) \operatorname{Cos}\lambda$$

$$y = \lambda' - \lambda$$

et éliminant $(T - \varphi)$, on a l'ellipse

$$x^2 + \frac{y^2}{\operatorname{Sin}^2\lambda} = m^2 = \pi^2 + \mu^2$$

ce qui confirme bien la théorie géométrique.

on voit d'ailleurs que, l'équation pouvant s'écrire

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{m^2 \operatorname{Sin}^2\lambda} = 1$$

le grand axe m a une longueur invariable, si π est constant.

Singularités historiques.

Dans le commencement du Système de Copernic, on comptait bien trouver des ellipses parallactiques: on trouva les ellipses d'aberration. De là des déboires, et l'on dit que c'étaient les étoiles qui se trompaient, et non le Système de Copernic: d'où le nom d'aberration des étoiles.

On remarquait bien du reste que ces ellipses étaient d'autant plus étroites que les étoiles étaient plus rapprochées de l'écliptique, mais qu'elles avaient toutes même grand axe. — De plus, il y avait discordance entre les résultats prévus et ceux de l'observation: l'étoile, sur son ellipse d'aberration, paraissait toujours à une position différente (de 90°) de celle qu'elle aurait dû avoir sur une ellipse parallactique.

Comment pouvait-on se tirer de là? — Quelle que fût la cause physique du phénomène, on peut chercher à l'expliquer empiriquement.

Pour toutes les étoiles, on trouvait μ, grand axe de l'ellipse, égal à 20". Or, on avait trouvé la vitesse de la lumière: d'où l'on a conçu l'explication des phénomènes.

Acceptons les faits précédents. — Si le Système de Ptolémée est vrai, il n'est pas impossible d'expliquer les ellipses parallactiques: il suffit de faire tourner la sphère étoilée en un an comme si le Soleil était son centre: mais il faudrait supposer que les étoiles sont à diverses distances. — Pour rendre

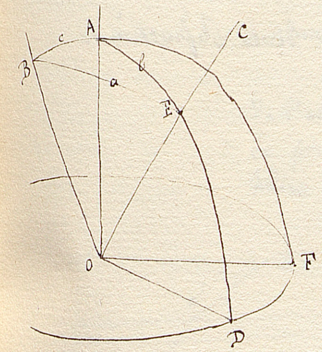
compte maintenant des ellipses d'aberration, en laissant de côté la parallaxe, il suffit de faire porter la Sphère par un point central situé à 90° en avant du Soleil, et de supposer les étoiles clouées à la Sphère. — Si l'on combine ces deux hypothèses, on les trouve incompatibles. — Donc le Système de Ptolémée est faux.

Différents Systèmes de Coordonnées employés en astronomie.

Supposons qu'on ait choisi un axe OA pour un certain Système de Coordonnées. Un plan, celui du papier, passant par cet axe, sera aussi déterminé; et l'on y rapporte les astres. — Il suffit alors de deux coordonnées dans ce Système :

1°. l'angle COA ; 2°. l'angle dièdre A du plan COA avec le plan fixe.

Si nous menons alors un plan perp. à OA, AE sera déterminé par son complément ED, et l'angle A par DF.

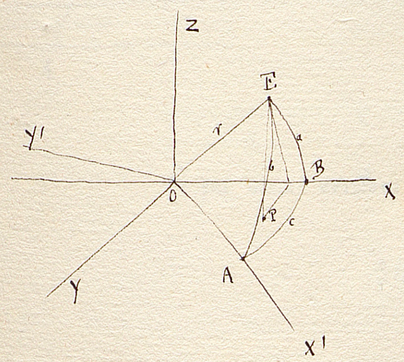


Si maintenant on change d'axe, soit BO le nouvel axe : E sera déterminé de même par l'arc BE et l'angle dièdre B.

Les angles dièdres se comptent de 0 à 360 dans un certain sens défini, et les distances angulaires à l'axe, de 0 à 180°.

Pour passer des premières coordonnées aux secondes, prenons des coordonnées rectangulaires qui sont là comme intermédiaires, et disparaîtront à la fin du calcul.

$$x = r \cos a$$
$$y = r \sin a \cos B$$
$$z = r \sin a \sin B$$



Changeons maintenant d'axes rectangulaires. Il suffit de faire tourner les axes OX et OY dans leur plan. Nous aurons

$$x' = r \cos b$$
$$y' = r \sin b \cos A$$
$$z' = r \sin b \sin A$$

En outre, nous avons (en appelant C l'angle en E) les formules connues de transformation de coordonnées :

$$x = x' \cos C - y' \sin C$$
$$y = x' \sin C + y' \cos C$$
$$z = z'$$

Si l'on élimine $x y z$, $x' y' z'$ entre ces neuf équations, on aura donc en définitive, r disparaissant,

$$\left\{\begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos C - \sin b \sin C \cos A \\ \sin a \cos B = \sin c \cos b + \cos c \sin b \cos A \\ \sin a \sin B = \sin b \sin A \end{array}\right.$$

(Dans ces 3 formules et les 3 précédentes, il faut lire c au lieu de C).

Si l'on joint ces trois équations à celles de la parallaxe et de l'aberration, on aura toutes celles dont on se sert en astronomie, soit pour changer d'origine, soit pour changer d'axes.

Ce sont du reste les formules de la trigonométrie sphérique, sauf une petite différence dans la manière de compter les angles.

Il n'y a jamais de cas douteux dans ces questions ci.

Nous pouvons maintenant choisir les axes les plus convenables pour résoudre certaines questions.

Le système qui a pour axe la verticale sert pour la théorie de la réfraction, et pour la géodésie et les parallaxes.

Celui qui a pour axe la ligne des pôles sert pour la géographie, la navigation, la précession, la nutation et la figure de la terre.

Celui qui a pour axe celui de l'écliptique sert pour la théorie des planètes et du système solaire tout entier.

Prenons d'abord le système qui a pour axe la verticale. C'est le système des mesures exactes: car la verticale est la seule ligne invariable qu'on puisse trouver à volonté; il faudrait des phénomènes géologiques immenses pour la faire varier. _ Pour qu'elle se déplaçât de 1″, il faudrait transporter au pôle les montagnes de l'Himalaya.

La première question que nous rencontrons est celle de la réfraction.

Réfraction.

Les coordonnées sont :

La verticale pour axe ; — l'azimuth et la distance zénithale.

Dans cette théorie nous supposerons que la Terre est sphérique, et que la verticale passe par le centre.

La hauteur de l'atmosphère est 1/100 du rayon R.

Disposition de l'atmosphère en couches sphériques.

La réfraction est nulle au zénith.

On sait qu'un rayon réfracté ne sort pas du plan d'incidence. — C'est ce qu'on exprime en astronomie en disant :

La réfraction ne change pas l'azimuth, mais altère seulement la distance zénithale.

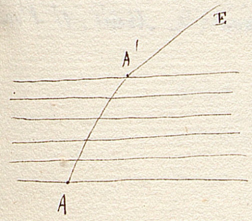
Le problème de la réfraction ne peut se traiter d'une manière complète, mais seulement par des hypothèses et des approximations successives.

Supposons, comme première hypothèse, que l'on néglige la sphéricité de l'atmosphère. — Nous pourrons connaître l'angle de la réfraction, mais non la forme de la trajectoire ; en effet, la direction extrême ne dépend que des indices du vide, et de l'air dans lequel nous sommes plongés (voir p. 124).

Soit alors z la dist. zénithale vraie

" z_1 " " apparente

et l l'indice de réfraction de l'air en A par rapport au vide. — on aura



$$\frac{\sin I}{\sin R} = l$$

ou

$$\frac{\sin z}{\sin z_1} = l$$

Ce que nous voulons calculer, c'est la modification $z - z_1$. Posons

$$z - z_1 = \rho$$

d'où

$$z = z_1 + \rho$$

$$\frac{\sin (z_1 + \rho)}{\sin z_1} = l$$

$$\sin z_1 + \sin \rho \cos z_1 = l \sin z_1 \qquad \text{(en posant } \cos\rho = 1\text{)}$$

$$\sin \rho = (l-1) \operatorname{tg} z_1$$

ou bien

$$\rho \sin 1'' = (l-1)\operatorname{tg} z_1$$

$$\rho = \frac{l-1}{\sin 1''}\operatorname{tg} z_1$$

d'ailleurs :

$\frac{1}{\sin 1''} = 206265''$ et $l = 1,0002944$ pour barom $= 0^m,760$ et $t = 0°$

D'où

$$\rho = 60'',6 \operatorname{tg} z_1$$

Cette formule n'est relative qu'à l'état atmosphérique $b = 0,760$ et $t = 0$. Mais on sait que l^2-1 varie proportionnellement à la densité. Nous pouvons dire qu'il en est de même de $\underline{l-1}$, qui ne diffère de $\frac{1}{2}(l^2-1)$ que d'un infiniment petit du 2d. ordre (p. 125). — or

$$\text{Densité à } t \text{ degrés} = \frac{1}{1+0,00366\,t} \text{ si elle est 1 à } 0°.$$

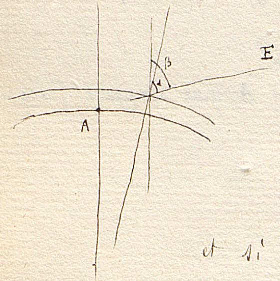
Nous aurons donc, en désignant par $\underline{b}$ la pression barométrique :

$$\rho = 60'',6 \times \frac{b}{0,760} \times \frac{1}{1+0,00366\,t} \times \operatorname{tg} z_1$$

Cette formule s'accorde avec l'expérience jusqu'à 60° environ. — au zénith elle donne $\rho = 0$, et à l'horizon, $\rho = \infty$.

Il n'y a rien d'absurde dans ce dernier résultat : c'est une conséquence de notre hypothèse que l'atmosphère est infinie dans le sens horizontal.

On doit plutôt se demander comment il se fait que la formule s'accorde aussi loin. — C'est que nous avons supposé l'atmosphère plane, et, au lieu de l'angle d'incidence véritable $\underline{\alpha}$, nous avons pris β. — or, pour une distance zénithale de 60°, $\beta - \alpha = 1°$ seulement ; ce qui est bien peu de chose pour la valeur de la réfraction.



La formule donne $\rho = \infty$ pour l'horizon. — Mais, si l'on revient à l'équation

$$\frac{\sin(z_1+\rho)}{\sin z_1} = l$$

et si l'on y fait

$$z_1 + \rho = 90° \qquad z_1 = 90° - \rho$$

elle donne

$$\frac{1}{\cos\rho} = l$$

$$\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\rho} = l$$

$$\operatorname{tg}\rho = \sqrt{l^2-1}$$

$$\rho = \frac{1}{\sin 1''}\sqrt{l^2-1}$$

D'où

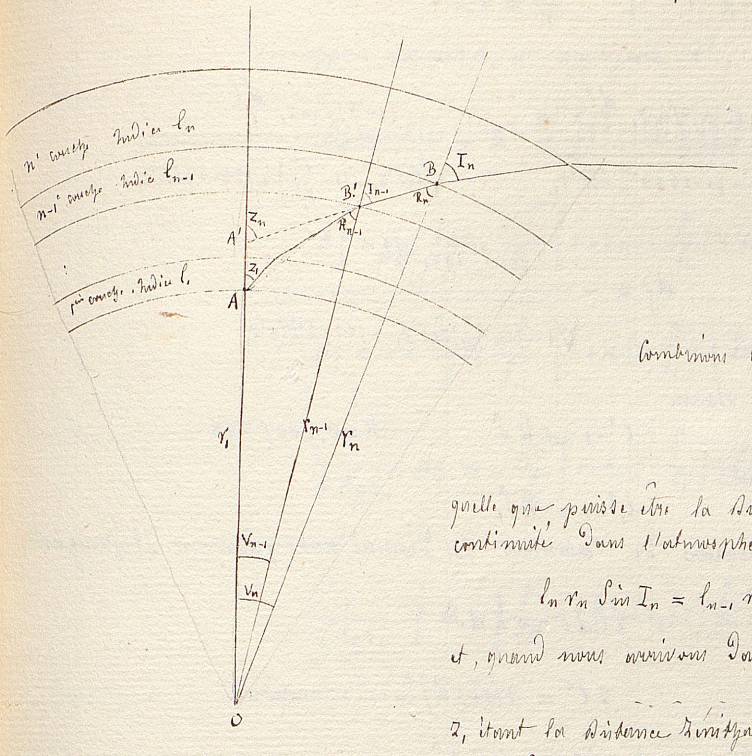
$$\rho = 3500'' \text{ environ.}$$

c'est à dire ~~en~~ à peu près 1°.

Les étoiles qu'on observe à l'horizon ou tout près éprouvent de grandes

effets de dispersion. on aperçoit au lieu d'un point, une Ovale Colorée : et le violet est en haut, parce que les objets sont Renversés dans les Lunettes.

Introduisons maintenant la Sphéricité des Couches d'air.



L'Equation de Réfraction est

$$\frac{\sin I_n}{\sin R_n} = \frac{l_{n-1}}{l_n}$$

celle de la sphéricité des couches, donnée par le triangle OBB', est

$$\frac{\sin R_n}{\sin I_{n-1}} = \frac{r_{n-1}}{r_n}$$

Combinons ces deux Equations :

$$\frac{\sin I_n}{\sin I_{n-1}} = \frac{l_{n-1}\, r_{n-1}}{l_n\, r_n}$$

quelle que puisse être la distribution des densités, pourvu qu'il y ait continuité dans l'atmosphère. – Cette Equation donne

$$l_n r_n \sin I_n = l_{n-1} r_{n-1} \sin I_{n-1} = \dots = \text{Const.}$$

et, quand nous arrivons dans la première couche :

$$\dots\dots = l_1 r_1 \sin z_1$$

z_1 étant la distance zénithale apparente que nous mesurons.

Quelle que soit la Courbe, nous voulons avoir l'angle des deux tangentes extrêmes, c.a.d. la somme des angles de contingence de cette courbe depuis A jusqu'aux limites de l'atmosphère.

or on a

$$\operatorname{tg} I = \frac{r\,dv}{dr} \qquad z = I + v$$

$$d\rho = dz = dI + dv$$

Différentiant l'Equation

$$r l \sin I = r_1 l_1 \sin z_1$$

on a

$$r l \cos I\, dI + l \sin I\, dr + r \sin I\, dl = 0$$

$$dI = -\frac{dr}{r}\operatorname{tg} I - \frac{dl}{l}\operatorname{tg} I$$

remplaçons dans la valeur $d\rho = dI + dv$, dI par cette valeur, et dv par $\frac{dr}{r}\operatorname{tg} I$, il viendra

$$d\rho = -\frac{dl}{l}\operatorname{tg} I = -\frac{dl}{l}\,\frac{\sin I}{\sqrt{1-\sin^2 I}}$$

$$d\rho = \frac{-\frac{r_1 l_1}{r l}\sin z_1}{\sqrt{1-\left(\frac{r_1 l_1}{r l}\sin z_1\right)^2}}\cdot\frac{dl}{l}$$

Telle est l'Equation différentielle qu'il faut maintenant intégrer.

Voyons d'abord les variables qui y entrent. – ce sont l et r, et il faudrait connaître l en fonction de r. – L'artifice consiste à poser des lois qui se rapprochent de la Réalité. – Nous en essaierons jusqu'à ce que nous trouvions des ~~lois~~ Résultats conformes aux observations.

Il y a d'abord des quantités qui varient très-peu, et dont les variations peuvent être négligées à partir d'une certaine puissance. ainsi, nous négligerons $(l^2-1)^3$. – Puis, $\frac{r_1}{r}$ est très voisin de 1. Nous poserons

$$\frac{r_1}{r} = 1 - s$$

et nous aurons

$$d\rho = \frac{-(1-s)\sin z_1 \frac{dl}{l}}{\sqrt{\frac{l^2}{l_1^2} - (1-2s+s^2)\sin^2 z_1}} = -\frac{(1-s)\sin z_1 \frac{dl}{l}}{\sqrt{\cos^2 z_1 - \left(1-\frac{l^2}{l_1^2}\right) + (2s-s^2)\sin^2 z_1}}$$

$$d\rho = -\frac{(1-s)\,\mathrm{Tg}\, z_1 \frac{dl}{l}}{\sqrt{1-\left(1-\frac{l^2}{l_1^2}\right)\mathrm{Sec}^2 z_1 + (2s-s^2)\mathrm{Tg}^2 z_1}}$$

Mais la physique donne

$$l^2 - 1 = k\delta \qquad k = 0{,}000 5888$$

et aussi par conséquent

$$l_1^2 - 1 = k\delta_1$$

ce qui va nous permettre de substituer les densités aux pouvoirs réfringents. Différentiant, on a

$$2l\,dl = k\,d\delta$$

divisant par

$$2l^2 = 2(1+k\delta)$$

on a

$$\frac{dl}{l} = \frac{\frac{1}{2}k\,d\delta}{1+k\delta}$$

Substituant

$$d\rho = -\frac{\frac{1}{2}(1-s)\,\mathrm{Tg}\, z_1 \frac{k\,d\delta}{1+k\delta}}{\sqrt{1-\left(1-\frac{l^2}{l_1^2}\right)\mathrm{Sec}^2 z_1 + (2s-s^2)\mathrm{Tg}^2 z_1}}$$

l n'a pas encore disparu. – on a

$$1-\frac{l^2}{l_1^2} = 1-\frac{1+k\delta}{1+k\delta_1} = \frac{k\delta_1 - k\delta}{1+k\delta_1}$$

Posons

$$k\delta_1 = 2\alpha\,(1+k\delta_1)$$

alors

$$k\delta = 2\alpha\,(1+k\delta_1)\frac{\delta}{\delta_1}$$

[(α est précisément l_1-1 ou $0{,}0002944$ quand δ_1 correspond à la pression $b=0^m{,}76$ et $t=0°$. Car on peut remarquer que l_1 est très-voisin de 1. Posons $l_1 = 1+\varepsilon$, $l_1 - 1 = \varepsilon$; d'où $l_1^2 = (1+\varepsilon)^2 = 1+2\varepsilon$, $l_1^2 - 1 = 2\varepsilon = 2(l_1-1)$. On aura puisque $l_1^2-1 = k\delta_1$, $2\varepsilon = k\delta_1$ et $1+k\delta_1 = 1+2\varepsilon$. d'où $2\alpha = \frac{k\delta_1}{1+k\delta_1} = \frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon} = 2\varepsilon(1-2\varepsilon) = 2\varepsilon$; par suite $\alpha = \varepsilon = l_1 - 1 = 0{,}0002944$, si $b = 0{,}76$ et $t=0°$).]

Substituant, on trouve

$$1-\frac{1+k\delta}{1+k\delta_1} = 1-\frac{l^2}{l_1^2} = 2\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_1}\right)$$

et par suite $\frac{1+k\delta}{1+k\delta_1} = 1-2\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_1}\right)$, $1+k\delta = (1+k\delta_1)\left\{1-2\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_1}\right)\right\} = \frac{k\delta_1}{2\alpha}\left\{1-2\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_1}\right)\right\}$

Remplaçant dans $d\rho$, il vient

$$d\rho = -\frac{(1-s)\,\mathrm{Tg}\,z_1\,\alpha\,\frac{d\delta}{\delta_1}}{\left\{1-2\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_1}\right)\right\}\sqrt{1-2\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_1}\right)\mathrm{Sec}^2 z_1+(2s-s^2)\,\mathrm{Tg}^2 z_1}}$$

Développons en séries, et négligeons α^3, s^3, $\alpha^2 s$, αs^2,.. nous aurons

$$d\rho = -\alpha(1-s)\,\mathrm{Tg}\,z_1\,\frac{d\delta}{\delta_1}\left\{1+2\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_1}\right)\right\}\left\{1+\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_1}\right)\mathrm{Sec}^2 z_1 - s\,\mathrm{Tg}^2 z_1\right\}$$

$$d\rho = -\alpha\,\mathrm{Tg}\,z_1\,\frac{d\delta}{\delta_1}\left\{1+2\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_1}\right)+\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_1}\right)\mathrm{Sec}^2 z_1 - s\,\mathrm{Tg}^2 z_1 - s\right\}$$

$$d\rho = -\alpha\,\mathrm{Tg}\,z_1\,\frac{d\delta}{\delta_1}\left\{1+\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_1}\right)\left(\mathrm{Sec}^2 z_1+2\right) - s\,\mathrm{Sec}^2 z_1\right\}$$

$$\frac{1}{\alpha\,\mathrm{Tg}\,z_1}\,d\rho = -\frac{d\delta}{\delta_1}\left\{1+\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_1}\right)\left(\mathrm{Sec}^2 z_1+2\right) - s\,\mathrm{Sec}^2 z_1\right\}$$

Intégrant

$$\frac{1}{\alpha\,\mathrm{Tg}\,z_1}\,\rho = -\left\{\frac{\delta}{\delta_1}+\alpha\left(\mathrm{Sec}^2 z_1+2\right)\frac{\delta}{\delta_1}-\frac{\alpha}{2}\left(\mathrm{Sec}^2 z_1+2\right)\frac{\delta^2}{\delta_1^2}-\frac{\mathrm{Sec}^2 z_1}{\delta_1}\int s\,d\delta\right\}$$

Intégrant de δ_1 à zéro :

$$\frac{1}{\alpha\,\mathrm{Tg}\,z_1}\,\rho = 1+\alpha\left(\mathrm{Sec}^2 z_1+2\right)-\frac{1}{2}\alpha\left(\mathrm{Sec}^2 z_1+2\right)+\frac{\mathrm{Sec}^2 z_1}{\delta_1}\int s\,d\delta$$

$$\frac{1}{\alpha\,\mathrm{Tg}\,z_1}\,\rho = 1+\frac{1}{2}\alpha\left(\mathrm{Sec}^2 z_1+2\right)+\frac{\mathrm{Sec}^2 z_1}{\delta_1}\int s\,d\delta$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer $\int s\,d\delta$. (Intégrale Barométrique de Leverrier).

Si nous prenons une atmosphère en équilibre, et que nous considérions une couche quelconque, pour descendre à l'autre couche, il faut ajouter à la pression de la couche supérieure son propre poids, qui vient augmenter la pression de la couche suivante. — Donc, dp étant l'accroissemt. de pression, on a

$$dp = -\delta\,g\,dr$$

(avec le signe − parce que dr est négatif quand p augmte.) — or nous avons

$$\frac{r_1}{r} = 1-s$$

$$-\frac{r_1}{r^2}\,dr = -ds$$

D'où

$$dp = -\delta\,g\,\frac{r^2}{r_1}\,ds$$

Mais g varie, et l'on a

$$\frac{g}{g_1} = \frac{r_1^2}{r^2}$$

Donc

$$dp = -\delta\,g_1\,r_1\,ds$$

Intégrant

$$p = -g_1 r_1 \int \delta . ds$$

et, de p_1 à 0

$$p_1 = g_1 r_1 \int \delta . ds$$

or on a

$$\int s d\delta = s\delta - \int \delta . ds$$

et $s\delta$ s'annule aux deux limites de l'intégration, quand $\delta = 0$, et quand $\frac{r_1}{r} = 1$ à la surface de la terre. — Donc

$$\int_1^0 s d\delta = -\frac{p_1}{g_1 r_1}$$

et par suite

$$\frac{1}{2 \operatorname{tg} z_1} \rho = 1 + \tfrac{1}{2}\alpha \left(\sec^2 z_1 + 2\right) - \sec^2 z_1 \frac{p_1}{g_1 r_1 \delta_1}$$

Comment réduire en nombres ce dernier terme ?

Soit L la hauteur de l'atmosphère, de densité uniforme $p\,\delta_1$, qui donnerait lieu à la pression p_1. On aura

$$p_1 = L . \delta_1 . g_1$$

Mais

$$p_1 = 0^m,76 \times \Delta \quad (\Delta = \text{densité du } Hg).$$

Donc

$$L = 0^m,760 \frac{\Delta}{\delta_1} = 0^m,760 \times 10513,5 = 8000^m$$

ce qui montre comment on peut calculer L dans les circonstances normales, et par suite, dans toute autre. — Donc en général

$$L = \frac{p_1}{g_1 \delta_1}$$

et le dernier terme est

$$\sec^2 z_1 . \frac{L}{r_1}$$

on a d'ailleurs $r_1 = 6366000^m$, et $\frac{L}{r_1} = 0,00125$, avec $\alpha = 0,0002944$ dans les circonstances normales.

On a définitivement

$$\frac{1}{2 \operatorname{tg} z_1} \rho = 1 + \tfrac{1}{2}\alpha \left(\sec^2 z_1 + 2\right) - \frac{L}{r_1} \sec^2 z_1$$

Et, en remplaçant $\sec^2 z_1$ par sa valeur $1 + \operatorname{tg}^2 z_1$:

$$\rho = \alpha \left(1 + \tfrac{3}{2}\alpha - \frac{L}{r_1}\right) \operatorname{tg} z_1 + \alpha \left(\tfrac{1}{2}\alpha - \frac{L}{r_1}\right) \operatorname{tg}^3 z_1$$

En substituant les nombres précédents, qui conviennent pour les circonstances normales de température et de pression, on obtient

$$\rho = 60'',67 \operatorname{tg} z_1 - 0'',067 \operatorname{tg}^3 z_1$$

formule qui ne diffère de la précédente que par le dernier terme, qui est très-petit dans le voisinage du zénith.

La première formule de la Réfraction,

$$\rho = 60'',7 \, tg \, z,$$

va jusqu'à 55°, et la dernière, jusqu'à 80°.

Au-delà de cette limite, quand bien même on mesurerait la Réfraction avec précision, cela ne servirait guères, puisque les observations faites à ces petites hauteurs sont mauvaises et peu importantes, à cause des Dispersions.

La dernière formule est vraie quelle que soit la constitution de l'atmosphère car il n'a été fait d'autre hypothèse que celle-ci : les couches sont sphériques. L'atmosphère répond-elle réellement à cette hypothèse ? oui, s'il n'y avait pas d'accidents météorologiques. — Mais les vents ne troublent guères ces Résultats du calcul. Cependant, les orages nuisent aux observations, et, plus le ciel est beau, plus on se rapproche de l'atmosphère idéale que nous avons supposée.

Les courants aériens ont lieu surtout dans les couches inférieures. Mais il y a aussi des courants supérieurs qui se croisent en différents sens, et ne transportent guères les couches d'air à des hauteurs très-différentes.

Notre hypothèse d'une atmosphère en équilibre est donc suffisamment approchée de la vérité.

Bien qu'à la rigueur, l'astronomie puisse se faire avec des Tables de Réfraction allant jusqu'à 80° seulement, il est bon de voir si l'on ne pourrait pas étendre la formule au-delà de cette limite.

Si l'on tenait compte des termes du 3e ordre dans le calcul précédent, on trouverait pour le terme suivant de la valeur de $d\rho$:

$$-\frac{3}{4} \alpha s^2 \, tg^5 z, \frac{d\delta}{\delta_1}$$

C'est le terme qu'il faudrait intégrer pour pousser plus loin la formule. Mais on ne peut le faire si l'on ne connaît pas $\delta = f(s)$, c.a.d. la constitution de l'atmosphère.

Ce terme est nécessairement très-petit. Il n'est donc pas indispensable de connaître bien exactement $f(s)$ et nous allons chercher par tâtonnement la loi qui approche le plus de la loi réelle.

Voici ce qui se trouve dans Laplace, dont les Tables de Réfraction sont les plus employées.

Si nous admettons la loi de Mariotte pure et simple, avec une température uniforme, $f(s)$ serait simple : on aurait

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\delta}{\delta_1}$$

et en différentiant

$$dp = \frac{p_1}{\delta_1} d\delta$$

Mais on a

$$dp = -g\delta \, dr \, , \quad \frac{r_1}{r} = 1 - s \, , \quad -\frac{r_1}{r^2} dr = -ds \, , \text{ d'où } dp = -g\delta \frac{r^2}{r_1} ds \, , \quad \frac{g}{g_1} = \frac{r_1^2}{r^2}$$

$$dp = -g_1 \delta r_1 \, ds$$

D'où l'on tire

$$\frac{p_1}{\delta_1} d\delta = -\delta g_1 r_1 \, ds$$

$$\frac{d\delta}{\delta} = -\frac{\delta_1 g_1 r_1}{p_1} ds$$

Intégrant :

$$\text{Log}\,\delta = -\frac{g_1 r_1 \delta_1}{p_1}\, s + C$$

Quand $s = 0$, on a $\delta = \delta_1$. Donc $C = \text{Log}\,\delta_1$

$$\text{Log}\,\frac{\delta}{\delta_1} = -\frac{g_1 r_1 \delta_1}{p_1}\, s$$

$$\delta = \delta_1\, e^{-\frac{g_1 r_1 \delta_1}{p_1} . s}$$

Si cette loi était vraie, nous aurions donc δ en fonction de s : on voit que si s varie en progression arithmétique, δ varie en progression géométrique. Mais si on introduit cette valeur de δ dans la formule de la Réfraction, elle donne pour les Réfractions horizontales des Résultats trop forts.

Tâchons d'essayer une autre loi, celle-ci :

$$\delta = \delta_1\,(1 + \mu s)$$

(Quelque chose domine dans ces tâtonnements : c'est qu'ils rendent les calculs faciles). — On trouve de cette manière des Résultats trop faibles.

Peut-être qu'une fonction de forme intermédiaire satisferait : — La voici

$$\delta = \delta_1\,(1 + As)\, e^{-Bs}$$

A et B étant deux coefficients qu'on devra déterminer. — On pourrait tirer de là $\frac{d\delta}{\delta_1}$, et intégrer le troisième terme de notre formule.

Laplace n'a pas suivi tout-à-fait cette marche. — Avant d'introduire cette forme intermédiaire de la fonction qui représente l'état de l'atmosphère, reprenons l'équation différentielle

$$d\rho = -\frac{\frac{r_1 l_1}{r l} \sin z_1 \frac{dl}{l}}{\sqrt{1 - \frac{r_1^2 l_1^2}{r^2 l^2} \sin^2 z_1}}$$

Cette formule ne se trouve pas dans la Mécanique céleste, où il reste des traces de la théorie de l'émission. — Transformons-la :

$$d\rho = -\frac{\sin z_1 \frac{dl}{l}}{\sqrt{\frac{r^2 l^2}{r_1^2 l_1^2} - \sin^2 z_1}}$$

$$d\rho = -\frac{\sin z_1 \frac{dl}{l}}{\sqrt{\frac{l^2}{l_1^2}(1 - s)^{-2} - \sin^2 z_1}}$$

Maintenant, $\frac{l}{l_1}$ est extrêmement voisin de l'unité : donc on a

$$\frac{l^2}{l_1^2}(1 - s)^{-2} = \frac{l^2}{l_1^2} + \frac{l^2}{l_1^2} . 2s$$

en négligeant seulement des termes du 2e ordre : et de même, on peut remplacer $\frac{l^2}{l_1^2} . 2s$ par $2s$, en négligeant une quantité plus petite que $2s . \frac{1}{(1,0002944)^2}$

On aura alors

$$d\rho = \frac{-\sin z_1 \frac{dl}{l}}{\sqrt{-1 + \frac{l^2}{l_1^2} + 2s + \cos^2 z_1}}$$

Ce qui, par les mêmes transformations que précédemment, peut s'écrire :

$$d\rho = -\frac{\alpha \frac{d\delta}{\delta_1} \sin z_1}{\left\{1-2\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_1}\right)\right\}\sqrt{\cos^2 z_1 - 2\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_1}\right)+2s}}$$

Il n'y a aucun inconvénient à remplacer hors du radical $1-2\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_1}\right)$ par la moyenne des valeurs extrêmes que prend cette expression, c.à.d. par $1-\alpha$: alors

$$d\rho = -\frac{\alpha \frac{d\delta}{\delta_1} \sin z_1}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z_1 - 2\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_1}\right)+2s}}$$

Pour continuer maintenant les calculs, écrivons

$$-2\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_1}\right)+2s = 2y$$

alors

$$d\rho = -\frac{\alpha \frac{d\delta}{\delta_1} \sin z_1}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z_1 + 2y}}$$

Et imaginons qu'on ait

$$\delta = \delta_1 (1+my)\, e^{-ky}$$

en différentiant

$$\frac{d\delta}{\delta_1} = (-k - mky + m)\, e^{-ky} dy$$

et par suite

$$d\rho = \frac{\alpha \sin z_1 (k+mky-m)\, e^{-ky} dy}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z_1 + 2y}}$$

Introduisons une nouvelle variable pour faire disparaître le radical au dénominateur. Posons

$$\cos^2 z_1 + 2y = \frac{2}{k} t^2$$

d'où

$$dy = \frac{2}{k} t\, dt$$

et

$$y = \frac{1}{k} t^2 - \frac{1}{2}\cos^2 z_1$$

Il viendra

$$d\rho = \frac{\alpha \sin z_1}{1-\alpha} \cdot \left(k + mt^2 - \tfrac{1}{2} mk \cos^2 z_1 - m\right) \cdot \frac{1}{t\sqrt{\frac{2}{k}}} \cdot e^{-t^2 + \frac{1}{2} k \cos^2 z_1} \cdot \frac{2}{k} t\, dt$$

Simplifiant :

$$d\rho = e^{\frac{1}{2} k \cos^2 z_1} \cdot \frac{\alpha \sin z_1}{1-\alpha} \sqrt{\frac{2}{k}} \left\{k + mt^2 - \tfrac{1}{2} mk \cos^2 z_1 - m\right\} e^{-t^2} dt.$$

Posant

$$Q = e^{\frac{1}{2} K \cos^2 z_1} \cdot \frac{2 \sin z_1}{1-\alpha} \sqrt{\frac{2}{K}}$$

il vient

$$\frac{1}{Q} d\rho = \left\{ K + mt^2 - \tfrac{1}{2} mK \cos^2 z_1 - m \right\} e^{-t^2} dt$$

Intégrant

$$\frac{1}{Q} \rho = \left(K - \tfrac{1}{2} mK \cos^2 z_1 - m \right) \int e^{-t^2} dt + m \int t^2 e^{-t^2} dt$$

Intégrons par parties cette dernière expression

$$\int t^2 e^{-t^2} dt = -\tfrac{1}{2} \int -2 e^{-t^2} t\, dt \times t = -\tfrac{t}{2} e^{-t^2} + \tfrac{1}{2} \int e^{-t^2} dt$$

alors on aura

$$\frac{1}{Q} \rho = \left(K - \tfrac{1}{2} mK \cos^2 z_1 - m \right) \int e^{-t^2} dt - \tfrac{1}{2} m t e^{-t^2} + \tfrac{1}{2} m \int e^{-t^2} dt$$

$$\frac{1}{Q} \rho = \left(K - \tfrac{1}{2} mK \cos^2 z_1 - \tfrac{1}{2} m \right) \int e^{-t^2} dt - \tfrac{1}{2} m t e^{-t^2}$$

Quelles seront les limites de l'intégration, depuis la couche où $\delta = \delta_1$ jusqu'à celle où $\delta = 0$? — on a

$$\delta = \delta_1 (1 + my) e^{-Ky}$$

si $\delta = \delta_1$, $(1+my) e^{-Ky} = 1$: donc $y = 0$.
si $\delta = 0$, $(1+my) e^{-Ky} = 0$: donc $y = \infty$.
D'ailleurs, on a posé

$$t = \sqrt{\tfrac{1}{2} K \cos^2 z_1 + \tfrac{y}{K}}$$

donc

$$y = 0, \quad t = \sqrt{\tfrac{1}{2} K \cos^2 z_1} = T \quad ; \quad y = \infty, \quad t = \infty$$

donc

$$\frac{1}{Q} \rho = \left(K - \tfrac{1}{2} mK \cos^2 z_1 - \tfrac{1}{2} m \right) \int_T^{\infty} e^{-t^2} dt + \tfrac{1}{2} m T e^{-T^2}$$

Telle est la Loi de la Réfraction donnée par Laplace. — Elle implique le calcul d'une transcendante. — on pose

$$\int_T^{\infty} e^{-t^2} dt = e^{-T^2} \psi(T)$$

et l'on a enfin

$$\rho = \sqrt{\tfrac{2}{K}} \cdot \frac{2 \sin z_1}{1-\alpha} \left\{ K - \tfrac{1}{2} m - mT^2 \right\} \psi(T) + \tfrac{1}{2} \frac{m \alpha \sin z_1 \cos z_1}{1-\alpha}$$

Les valeurs de $\psi(T)$ se trouvent dans les Tables de Réfraction de Bessel.

Il y a deux coefficients, k et m, qu'il faut déterminer. — Pour cela, on calcule au moyen de la loi admise la pression totale de l'atmosphère. On égale cette expression à 760mm. De là une première relation. — La seconde se tire de la valeur de la réfraction horizontale, qu'on peut trouver par l'expérience, et que donne la formule, qui ne devient pas infinie, mais bien

$$R = \frac{\alpha}{1-2\alpha}\sqrt{\frac{2}{k}}\left\{k - \tfrac{1}{2}m\right\}\psi(0)$$

Il n'y a d'embarrassant que ce $\psi(0)$. — or on a

$$\psi(0) = \int_0^\infty e^{-t^2}dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

C'est là la seconde équation qui servira à déterminer k et m.

Substituant ces valeurs et celles de α dans la formule, on arrive à cette expression qui se trouve dans la Mécanique céleste, à très-peu près avec les mêmes valeurs :

$$\rho = 2790'',157\left\{0,75479 - 0,49042\,T^2\right\}\sin z_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}}\psi(T) + 10021'',343\sin z_1\cos z_1$$

C'est cette formule qu'on a réduite en tables pour $z_1 = 0°, 1°, 2°, 3°, \ldots$

La valeur numérique de T est

$$T = 25,962\cos z_1$$

Enfin, pour calculer $\psi(T)$, il faudrait procéder par séries :

$$\psi(T) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \left\{T - \frac{1}{1}\cdot\frac{T^3}{3} + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{T^5}{5} - \cdots\right\}$$

Car

$$\int_T^\infty e^{-t^2}dt = \int_0^\infty e^{-t^2}dt - \int_0^T e^{-t^2}dt$$

La première intégrale est $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$: la seconde se trouve aisément si l'on développe e^{-t^2} en série.

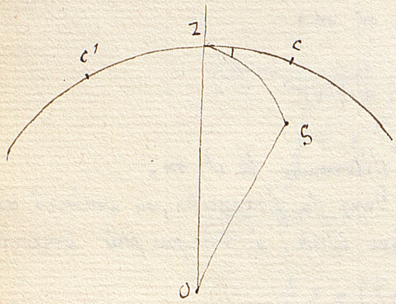
Comment peut-on contrôler les résultats de ce calcul par l'observation ? et comment peut-on perfectionner la connaissance des constantes qui y entrent ?

Nous avons complètement négligé l'humidité des couches d'air. La vapeur d'eau n'est entrée en rien dans nos raisonnements, et nous avons pris le pouvoir réfringent de l'air sec. Cependant, il y a accord. Cela tient à ce que, si la vapeur d'eau est plus réfringente que l'air ($\frac{1}{10}$ en plus), sa densité est moindre. La compensation n'est pourtant pas absolue ; mais il serait difficile d'en tenir compte, et on néglige cette cause d'erreur. — Ainsi, pour avoir la correction applicable à une distance zénithale, on note le

Thermomètre et le Baromètre, d'où l'on conclut les deux constantes: mais jamais on ne regarde l'Hygromètre. — Il faudrait cependant le faire, si l'on voulait étudier sérieusement les phénomènes de Réfraction qui ont lieu près de l'horizon: cela n'a pas encore été fait.

Nous avons vu ensuite qu'il faut observer des Réfractions horizontales, après de calculer K et m.

On a recours pour cela au mouvement diurne des Etoiles. — Soit la sphère céleste, et OZ la verticale. — Il importe peu qu'on se place au centre de la Terre ou à celui du Soleil: il en résultera 1" d'erreur, au plus: que sera-ce donc si nous ne sortons pas de la Terre, et si nous observons de sa surface au lieu d'observer de son centre! Donc le point O sera concentrée la Terre.



L'Etoile S est déterminée par sa distance zénithale et son azimuth.

Soit Z_1 la distance zénithale apparente, et

Z " " " vraie.

on aura

$$Z_1 + \rho = Z.$$

Voyons comment on pourrait trouver ρ par des Relations Géométriques.

Si le mouvement diurne n'existait pas, voici comment il faudrait faire: Soient deux Etoiles C et C' dans un même vertical, dont on mesure les distances zénithales. Si ces deux étoiles sont assez près du Zénith, la formule

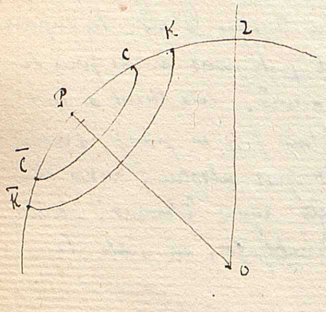
$$\rho = 60{,}''7 \operatorname{tg} z$$

suffira. — Pour observer les Réfractions à l'horizon, il faut voyager sur la Terre jusqu'à ce que C soit à l'horizon: C aura une grande Réfraction, et C' une faible. On observera la distance des deux Etoiles. En la comparant à la première distance, on aura la Réfraction à l'horizon.

C'est ainsi que fit Cassini quand il construisit les premières Tables de Réfraction passables. Il envoya Richer à Cayenne afin de changer de vertical, et de pouvoir mesurer des distances d'Etoiles dans différentes circonstances de hauteur. — On fut satisfait à cette époque du degré de précision ainsi obtenu.

Cette épreuve n'est pas idéale: c'est une garantie de savoir que les positions relatives des Etoiles observées par l'abbé Lacaille ou par les anglais qui ont un observatoire au Cap de B. Esp. sont les mêmes qu'en Europe.

Voyons maintenant comment on tient compte du mouvement diurne. La Rotation se fait autour d'un axe qu'on peut toujours supposer passant par l'œil de l'observateur. — Soit OP cet axe.



Soient C, K deux Etoiles au passage supérieur;

" $\bar{C}$, $\bar{K}$ ces " " inférieur: (notation usuelle).

Si $CZ = Z_1$, la dist. zénith. vraie est $Z_1 + \rho$

$\bar{C}Z = \bar{Z}_1$, " " " $\bar{Z}_1 + \bar{\rho}$

on a

$$\tfrac{1}{2}\left(Z_1 + \rho + \bar{Z}_1 + \bar{\rho}\right) = ZP = \lambda$$

λ est inconnu. — ρ et $\bar{\rho}$ seront calculés par les formules, ou bien il faudra les traiter comme des inconnues quand les Tables seront jugées insuffisantes. — Prenons la formule (pour les Etoiles circump.)

$$\rho = 60'',7 \operatorname{tg} z,$$

où l'on a

$$60'',7 = \frac{\alpha}{\sin 1''} = \frac{\ell - 1}{\sin 1''} \quad \ldots \quad \alpha = 0,0002944.$$

Mais cette constante α répond à l'air sec. Il faudrait, pour l'état actuel de l'atmosphère, lui faire subir certaines corrections. — Pour corriger cette constante α s'il y a lieu, il faut l'introduire dans nos formules. — Il viendra

$$z_1 + \alpha \operatorname{tg} z_1 + \bar{z}_1 + \alpha \operatorname{tg} \bar{z}_1 = 2\lambda$$

Cela fait deux inconnues. — On aura une seconde équation avec une autre étoile $K\bar{K}$:

$$\zeta_1 + \alpha \operatorname{tg} \zeta_1 + \bar{\zeta}_1 + \alpha \operatorname{tg} \bar{\zeta}_1 = 2\lambda$$

On ne se borne pas à deux équations. On en forme un grand nombre, qu'on traite par la méthode des moindres carrés.

Pour montrer comment on traite ces questions, écrivons ainsi

$$z_1 + \bar{z}_1 = 2\lambda + (-\operatorname{tg} z_1 - \operatorname{tg} \bar{z}_1)\,\alpha$$

ou

$$B = 2\lambda + A\alpha$$

de même

$$B' = 2\lambda + A'\alpha$$

$$B'' = 2\lambda + A''\alpha$$

etc. . . .

On forme ainsi des centaines d'équations. Soit n leur nombre.
Ajoutant, on a

$$(1) \qquad \frac{1}{n}\Sigma B = 2\lambda + \frac{\alpha}{n}\Sigma A$$

Retranchant la première successivement de toutes les autres :

$$B' - B = (A' - A)\,\alpha$$

ou

$$b = a\alpha$$

de même

$$b' = a'\alpha$$

$$b'' = a''\alpha$$

. . . . .

Multiplions la 1re par a, la 2e par a', ... et ajoutons :

$$(2) \qquad \Sigma ab = \alpha \Sigma a^2$$

Les Éq. (1) et (2) sont bien plus précises que deux qq. des premières. — d'où α.

Ce n'est pas là la marche qu'on suit. On ne choisit jamais pour inconnues des quantités déjà connues à peu-près. On ne prend pour inconnues que les petites corrections qu'elles doivent subir. — Ici on prendra $d\alpha$: $\alpha = 60'',7$. La vraie valeur de α, sera $\alpha + d\alpha$. L'avantage est que, dans le calcul des équations, il n'est plus besoin de pousser aussi loin le calcul des coefficients, puisque les inconnues sont petites. — On aurait alors, en différentiant :

$$z_1 + \alpha \operatorname{tg} z_1 + \bar{z}_1 + \alpha \operatorname{tg} \bar{z}_1 = 2\lambda + A\,d\alpha.$$

Delambre a trouvé

$$d\alpha = -0,0000005$$

d'où

$$\alpha + d\alpha = 0,0002939$$

Dans la formule de Laplace, il y a encore deux coefficients, m et k, entrant dans la formule qui représente la constitution de l'atmosphère.

$$\delta = \delta_1 (1 + my)\, e^{-ky}$$

avec

$$y = s - \alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_1}\right)$$

on en déduit la réfraction à l'horizon, et le poids de l'atmosphère. — Tout revient donc à déterminer par l'expérience cette réfraction à l'horizon, R. — Je peut prendre pour cela une étoile qui rase l'horizon, comme α de la Lyre ou α de Persée (à Paris). — Une étoile qui semble raser l'horizon se trouve en réalité au dessous d'une quantité R. — on a alors

$$Z_1 + \rho + Z_1 + R = 2\lambda$$

or, dans nos climats, ρ est très-petit. Car si une étoile rase l'horizon à son passage inférieur, elle passe près du zénith à son passage supérieur. ρ est donné par la valeur 60",7 Tg z, — d'où l'on déduit R.

A l'aide de ces deux seules données, la formule de Laplace se trouve réductible en nombres, et prend sa forme connue.

C'est là tout ce qu'on a emprunté à l'observation. — voici quelques nombres qui montrent l'exactitude de la formule:

$t = 0 \qquad b = 0^m{,}760$

80°	5' 32"	± 0",9
85°	10' 14"	± 2"
88°	14' 6"	± 8"
88° 30'	21' 54"	± 17"
89°	25' 19"	± 19"
89° 30'	29' 39"	± 20"
90°	35' 6"	

Du reste, quand bien même les formules seraient exactes, cela ne servirait à rien, car les étoiles alors paraissent sous forme de spectres: on ne sait sur quoi pointer.

C'est le soleil qu'on observe à l'horizon pour déterminer la réfraction horizontale. — Mais, comme il ne rase pas l'horizon dans nos climats, il faut suivre d'autres méthodes. — La forme bizarre de cet astre, ses dentelures, montrent qu'il n'y a pas moyen de faire une théorie de la réfraction à l'horizon. Les phénomènes de mirage, très-connus des marins, vont jusqu'à soulever des objets qui ne sont pas à l'horizon, et à leur donner des positions renversées. — on a vu le soleil se dédoubler, avoir une seconde image au-dessous de lui, et, pendant que le soleil vrai s'élève, l'autre semble se coucher.

Laissons donc de côté toute prétention à étudier le phénomène trop près de l'horizon.

On peut du moins chercher à adapter nos formules à des états variés de l'atmosphère.

α, k, ne varient avec la densité de l'air. — on peut admettre que α est proportionnel à la densité. — alors, si α correspond à $b = 0^m{,}760$ et $t = 0$, sa valeur générale est

$$\alpha \cdot \frac{b}{760} \cdot \frac{1}{1 + 0{,}003664}$$

comment avoir t? Le thermomètre ne donne pas la vraie température de l'air.

Si vous en placez un en dehors d'une salle, vous aurez la température de l'air, plus l'effet du rayonnement du sol, des murs et du ciel. – On protège bien l'instrument avec des écrans, mais cela ne suffit pas. – On parvient cependant à un résultat moyen en faisant tourner le thermomètre autour d'un axe afin d'l'agiter dans l'air.

Est-il donc possible de parler d'exactitude en astronomie, quand on voit dès le début d'un cours cette théorie de la réfraction qui ne répond qu'à un certain état moyen de l'atmosphère ? – Mais on peut concevoir que l'atmosphère ne s'écarte de cet état moyen que tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre ; on fait alors la somme et l'on prend la moyenne. – Les petites variations ont l'année pour période. Il en résulte que si l'on prend la moyenne des observations astronomiques faites pendant toute l'année, les causes perturbatrices seront annulées.

On a ainsi 35 étoiles fondamentales qu'on a bien étudiées, et auxquelles on compare les autres astres, de manière à éliminer les effets de la réfraction.

Historique de la Réfraction. –

Depuis Laplace, un travail remarquable sur la réfraction a été fait en Allemagne par Bessel. – La partie analytique est celle de Laplace. Mais la loi de constitution de l'atmosphère est différente. Bessel a pris

$$\delta = \delta_1 e^{-ks}$$

Les résultats sont très sensiblement exacts, en sorte que l'on hésite entre les deux tables, de Laplace et de Bessel. – Cette loi est fondée sur celle de Mariotte. Seulement, comme la température n'est pas la même à toutes les hauteurs, il a fallu déterminer k par l'observation.

Malgré les idées un peu vicieuses de Bessel sur la constitution de l'atmosphère, ses tables sont excellentes, et adoptées par toute l'Europe, excepté par nous.

En Angleterre, Ivory, qui a fondé sa théorie de la réfraction sur la loi

$$\delta = \delta_1 (1 + ms + ns^2)$$

a aussi donné de bonnes tables.

Il n'y a de différences entre ces trois théories qu'à l'horizon, et encore, elles ne sont pas très grandes.

Il serait oiseux, à l'aide de ces formules, de vouloir calculer la hauteur de l'atmosphère. – Cette hauteur importe peu dans les réfractions.

Nivellements Barométriques.

Il n'y a pas besoin cette fois-ci de connaître la loi de constitution de l'atmosphère dans toute son étendue, mais jusqu'à 8000m au plus: et même les formules qui vont suivre ne seront pas très exactes pour les hauteurs voisines de 8000m.

Nous prendrions bien

$$\delta = \delta_1 e^{-ks}$$

Seulement, comme cette loi suppose la température constante, il faudra y introduire cette condition que la température décroît suivant une loi connue. — Les ascensions en ballon, et celles qu'on a faites sur les montagnes élevées, montrent que la température décroît d'environ 1° par 180m.

Si l'on s'élève d'une quantité dr, le poids de la couche qui aurait dr pour épaisseur serait $g\delta dr$. Donc

$$dp = -g\delta dr$$

Posons

$$\delta = \frac{p}{kz}$$

p étant la pression, z étant la chaleur de la couche, qui est une fonction de r, et k un coefficient. On aura

$$k\frac{dp}{p} = -g\frac{dr}{z}$$

$$kLp = -\int g\frac{dr}{z}$$

En outre on a

$$\frac{g}{g_1} = \frac{r_1^2}{(r_1+h)^2} \qquad dr = dh$$

$$\frac{g}{g_1} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{r_1}\right)^2} = 1 - \frac{2h}{r_1}$$

Donc

$$kLp = -g_1\int \frac{1-\frac{2h}{r_1}}{z}\,dh$$

Écrivons

$$\left(1-\frac{2h}{r_1}\right)dh = dh' \quad \text{d'où} \quad h - \frac{h^2}{r_1} = h'$$

Il vient

$$kLp = -g_1\int\frac{dh'}{z}$$

Voici maintenant l'artifice. — Substituons à z une fonction de h convenable, et qui permette d'achever le calcul.

Laplace a supposé que la chaleur d'une couche pouvait être représentée par

$$z = m(1-nh')^{\frac{1}{2}}$$

ce qui n'est pas loin de la loi empirique que nous avons annoncée : car, en négligeant les puissances supérieures, on a

$$z = m - \tfrac{1}{2} mnh$$

Ce qui montre bien que z décroît en progression arithmétique quand y croît de la même manière.

On aura donc

$$k\,L.p = -g_1 \int \frac{dh'}{m(1-nh')^{\frac{1}{2}}}$$

Cette intégrale s'obtient aisément : car

$$d(1-nh')^{\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2} n (1-nh')^{-\frac{1}{2}}$$

donc.

$$k\,L.p = \frac{2g_1}{mn} (1-nh')^{\frac{1}{2}}$$

$$k\,L.p = \frac{2g_1}{mn} \cdot \frac{z}{m} = \frac{2g_1}{m^2 n}\, z$$

Il s'agit d'intégrer entre les deux limites où nous opérons, c.à.d. depuis la couche où la pression est p jusqu'à celle où elle est p_1 :

$$k\,L.p = \frac{2g_1}{m^2 n}\, z$$

$$k\,L.p_1 = \frac{2g_1}{m^2 n}\, m$$

car $h' = 0$ à la station inférieure où la pression est p_1. – delà

$$k\,L.\frac{p_1}{p} = \frac{2g_1}{m^2 n}(m-z)$$

$$k\,L.\frac{p_1}{p} = \frac{2g_1}{m^2 n} \cdot \frac{m^2-z^2}{m+z}$$

or, de $z = m(1-nh')^{\frac{1}{2}}$ on tire $z^2 - m^2 = -mnh'$. Substituant

$$k\,L.\frac{p_1}{p} = 2g_1 \frac{h'}{m+z}$$

Résolvant par rapport à h' :

$$h' = \frac{k}{2g_1}(m+z)\,\mathrm{Log.}\frac{p_1}{p}$$

C'est la vraie formule. – z est la température de la couche supérieure, m celle de la couche inférieure.

Le thermomètre n'indique pas ces quantités de chaleur. Si nous posons

$$z = l + t$$

l étant la chaleur correspondante à la glace fondante, nous aurons

$$m = l + t_1$$

Il faut déterminer l. – or on a

$$p = \delta k (l+t)$$

Si $t = 0$:

$$p_0 = \delta k l.$$

Si la température croît de 1°, la pression croît de 0,00366.

$$0{,}00366\ p_0 = \delta k l.\ \frac{1}{\theta}$$

$$0{,}00366 = \frac{1}{\theta}$$

On peut d'après cela écrire

$$h' = \frac{kl}{g_1}\left(1 + \frac{t+t_1}{2\theta}\right) Log.\ \frac{p_1}{p}$$

Ramon, connu par ses travaux barométriques, a trouvé que le facteur $\frac{kl}{g_1}$ était égal à 18336^m: en sorte que

$$h' = 18336^m\left(1 + 0{,}00366.\frac{t+t_1}{2}\right) Log.\ \frac{p_1}{p}$$

Si l'on veut encore tenir compte du décroissement de la gravité, on arrive à la formule

$$h = 18336^m\left(1 + 0{,}00366\ \frac{t+t_1}{2}\right) z\ Log\ \frac{b_1 z^2}{b}$$

où

$$z = \left(1 + \frac{h}{r_1}\right)$$

Il faut enfin remarquer que g_1 varie avec la latitude de la station et que l'on a

$$g_1 = g\ (1 + 0{,}002845\ \cos 2\lambda)$$

ce qui conduit à .

$$h = 18336^m\left(1 + 0{,}00366\ \frac{t+t_1}{2}\right) z\ log.\ \frac{b_1 z^2}{b}\ (1 + 0{,}002845\ \cos 2\lambda)$$

Voir la Table du Bureau des Longitudes.

On peut réduire cette formule en série, et l'on arrive à la formule très-simple

$$h = 32^m\,(t + t_1 + 500)\,\frac{b_1 - b}{b_1 + b}$$

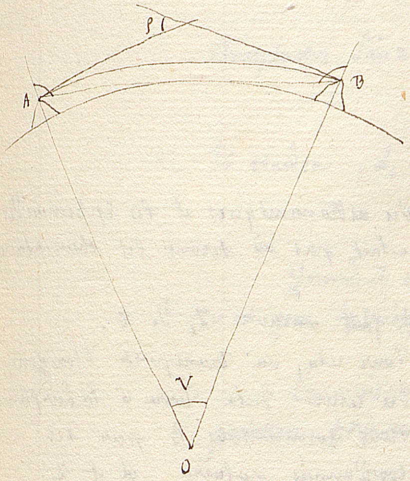
facile à retrouver, et exacte jusqu'à 2000^m. — Pour la déduire de la précédente on remarque que

$$Log\ \frac{b_1}{b} = Log\ \frac{1+x}{1-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + \dots$$

$$x = \frac{b_1 - b}{b_1 + b}$$

négligeant les termes en x^3, x^5, .. et substituant, on arrive à la dernière formule, où l'on a supposé $\lambda = 45°$.

Réfractions Géodésiques.



Théorème I.

La Réfraction totale, ou l'angle des deux tangentes extrêmes, est une certaine portion de l'angle au centre, et est proportionnelle à cet angle

$$\rho = \frac{8}{100} V$$

Théorème II.

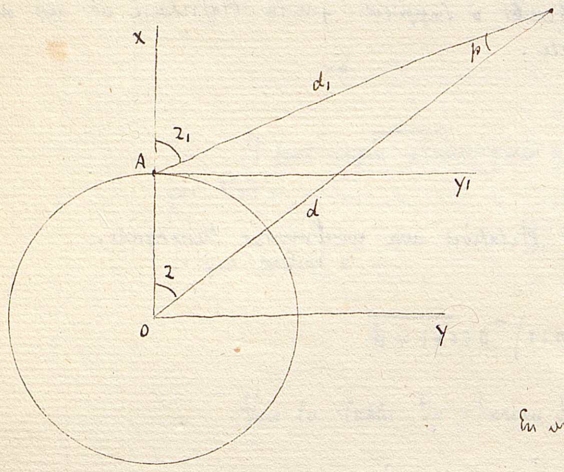
La Réfraction en B est égale à la Réfraction en A.

Cela revient à supposer que la trajectoire est un arc de cercle.

Continuons les questions relatives aux coordonnées zénithales.

Parallaxes Terrestres.

Tous les nombres donnés par les théories astronomiques et les Ephémérides se rapportent au centre de la Terre, car on ne sait pas où seront les observateurs ou les marins qui s'en serviront.



Il faut conclure z_1 de z.
Pour cela, on transporte l'origine du centre de la Terre à la surface.
Nous connaissons B par ses coordonnées polaires d et z.
et l'on a

$$\begin{cases} x = d\cos z \\ y = d\sin z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = d_1\cos z_1 \\ y' = d_1\sin z_1 \end{cases}$$

En outre

$$\begin{cases} x' = x - r \\ y' = y \end{cases}$$

Eliminant $x\ y\ x'\ y'$ on trouve

$$\begin{cases} d\cos z - r = d_1\cos z_1 & (1) \\ d\sin z = d_1\sin z_1 & (2) \end{cases}$$

ce qu'on cherche, c'est $z_1 - z$, car c'est une petite quantité, dont le calcul est plus facile.

Multiplions (1) par $\cos z$, (2) par $\sin z$ et ajoutons :

$$d_1\cos(z_1 - z) = d - r\cos z$$

Multiplions (1) par $\sin z$, (2) par $\cos z$, et retranchons la 1ère de la 2e :

$$d_1\sin(z_1 - z) = r\sin z$$

d'où

$$\operatorname{tg}(z_1 - z) = \operatorname{tg} p = \frac{r\sin z}{d - r\cos z}.$$

ou bien encore

$$\operatorname{tg}(z_1 - z) = \operatorname{tg} p = \frac{\frac{r}{d}\sin z}{1 - \frac{r}{d}\cos z}$$

formule qui est plus commode pour réduire en série. — $\frac{r}{d} = \frac{1}{24000}$ pour ☉ et $\frac{r}{d} = \frac{1}{60}$ pour ☾.

La parallaxe est donc exprimée au moyen de z.

On peut se proposer, inversement, de ramener les observations faites à la surface de la Terre à celles que l'on ferait du Centre. — Pour cela, dans l'Éq.

$$d_1 \sin(z_1 - z) = r \sin z$$

Remplaçons $\sin z$ par sa valeur tirée de

$$d \sin z = d_1 \sin z_1$$

Il viendra, d_1 disparaissant

$$\sin(z_1 - z) = \frac{r}{d} \sin z_1$$

Quand il s'agit de la Lune, on est obligé de faire attention à ceci, que la Terre n'est pas sphérique, et que la verticale ne passe pas par le Centre.

Examinons maintenant la signification du coefficient $\frac{r}{d}$. — Soit ϖ la parallaxe horizontale. on a

$$\frac{r}{d} = \sin \varpi.$$

Il en résulte que, si d est connu, on peut calculer ϖ, et par suite toutes les valeurs de la parallaxe pour les divers azimuths.

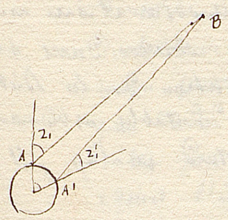
Si au contraire ϖ est connu, d s'ensuit. C'est par cette quantité que les distances interviennent en Astronomie.

Les marins trouvent dans les Tables les diverses valeurs de p pour le Soleil et la Lune.

Pour le Soleil, on a en moyenne $\varpi = 8'',57$. — La parallaxe de la Lune est bien plus considérable.

Comment déterminer $\varpi = 8'',57$? ce qui revient à trouver la distance du Soleil à la Terre.

C'est un problème de trigonométrie plane. — Supposons d'abord ce cas simple: Deux observateurs A et A' sont situés sur un même méridien, et observent au même instant les distances zénithales d'une planète quand elle passe au méridien. Les deux mesures, z_1 et z'_1, rapprochées l'une de l'autre, donnent la parallaxe.



Comment opèrent les astronomes? Les moindres erreurs sont fâcheuses: or les erreurs de réfraction sont bien difficiles à éviter, ainsi que les erreurs d'observation.

Ici se présente un procédé général pour éliminer ces erreurs. On observe les distances zénithales d'une Étoile très-voisine de la planète. — ainsi, supposons qu'on veuille déterminer la distance de Mars à la Terre. On prend une Étoile de comparaison, très-voisine, de sorte qu'il n'y ait qu'un très-petit laps de temps entre les deux observations de distances zénithales. Il n'y a pas de parallaxe pour l'Étoile, ou du moins, elle est de l'ordre des erreurs d'observation.

En A $\begin{cases} z_1 & \text{Dist. Zen. app. de Mars} \\ \zeta & \text{" de l'Etoile} \end{cases}$

en A' $\begin{cases} z'_1 & \text{— Mars} \\ \zeta' & \text{" l'Etoile.} \end{cases}$

Il s'agit d'en déduire la parallaxe de Mars en montrant qu'on a éliminé les erreurs. — Nous nous appuierons sur ceci : La distance angulaire de l'Etoile à Mars est la même, observée du centre de la Terre, qu'on la calcule d'après les observations faites en A ou d'après celles faites en A'.

On aura ($60'',7 \, \mathrm{Tg}\, z_1$ étant la Réfraction) :

$$\text{en A} \begin{cases} z_1 + 60'',7 \, \mathrm{Tg}\, z_1 - \frac{r}{d} \sin z_1 \\ \zeta + 60'',7 \, \mathrm{Tg}\, \zeta \end{cases}$$

pour les vraies distances zénithales observées du centre de la Terre. La différence donne l'angle entre les rayons visuels menés du centre de la Terre à l'Etoile et à Mars :

$$(1) \qquad z_1 - \zeta + 60'',7 \left(\mathrm{Tg}\, z_1 - \mathrm{Tg}\, \zeta\right) - \frac{r}{d} \sin z_1$$

De même

$$\text{en A'} \begin{cases} z'_1 + 60'',7 \, \mathrm{Tg}\, z'_1 - \frac{r}{d} \sin z'_1 \\ \zeta' + 60'',7 \, \mathrm{Tg}\, \zeta' \end{cases}$$

et

$$(2) \qquad z'_1 - \zeta' + 60'',7 \left(\mathrm{Tg}\, z'_1 - \mathrm{Tg}\, \zeta'\right) - \frac{r}{d} \sin z'_1$$

Egalons (1) et (2). Nous aurons seulement $\frac{r}{d}$ pour inconnue. — Montrons que nous avons éliminé les erreurs d'observation et de Réfraction. — S'il y a un défaut dans l'instrument, l'erreur commise sur l'Etoile sera la même sur Mars : donc elle sera détruite dans la différence. — De même, $\mathrm{Tg}\, z_1 - \mathrm{Tg}\, \zeta$ est très petit : donc aussi le terme qui dépend de la Réfraction, et l'on évite les erreurs grossières.

C'est ainsi qu'on a déterminé la parallaxe de Mars.

Nous avons supposé A et A' sur le même méridien. Cela est difficile. En fait, on a choisi les deux observatoires de Berlin, de Stockolm et du Cap, qui ne sont pas dans le même méridien. Les observations ne sont donc pas rigoureusement simultanées, car chacun observe dans son méridien. Mars se déplace dans l'intervalle. — La variation de la distance zénithale de Mars pendant ce temps peut se déduire des tables astronomiques, en sorte que si l'observation s'est faite un peu plus tard au Cap, il faut ajouter au premier membre

$$\frac{dz}{dt}(t - t')$$

on aura donc

$$z_1 - \zeta + 60'',7\left(\mathrm{Tg}\, z_1 - \mathrm{Tg}\, \zeta\right) - \frac{r}{d}\sin z_1 + \frac{dz}{dt}(t - t') = z'_1 - \zeta' + 60'',7\left(\mathrm{Tg}\, z'_1 - \mathrm{Tg}\, \zeta'\right) - \frac{r}{d}\sin z'_1$$

Je vais donner un exemple de ces calculs et les résultats auxquels on est arrivé.

Prenons pour type les observations de 1751 faites par l'abbé Lacaille au Cap, Wargentin à Stockolm, et Lalande à Berlin.

5 octobre 1751. — Mars et λ du verseau :

Lacaille au Cap (Colatitude 123° 55')

$z_1 = 25°\ 0'$ $\quad z_1 - \zeta_1 = 1'\ 25'',8$ (après la corr. de Réfr.)

Wargentin à Stockholm (Colatitude 39° 39')

$z_1' = 68°\ 14'$ $\quad z_1' - \zeta_1' = 1'\ 57'',7$

Diff. $= 31'',9$

Messerait nulle si Mars était à l'Infini.

Substituant, on trouve

$$\sin \varpi = \frac{r}{d} = \sin 23'',6$$

Mars varie de distance énormément: aussi d déduit de cette équation ne se rapporte qu'à cet instant

$$d = 8740\ r.$$

Je dis qu'on peut déduire de là les dimensions du système solaire. En effet, nous avons dit, à l'occasion des formules de parallaxe annuelle, que nous ne pouvions trouver que

$$\frac{R}{d} = \frac{\text{dist. de } \odot \text{ à } ♁}{\text{dist. de } ♁ \text{ à } ♂}$$

or les tables de Mars nous donnent en effet, à l'Époque de l'observation de Lacaille,

$$d = 0,4327\ R$$

d'où

$$R = 20398\ r$$

Il y a une erreur dans ces observations faites il y a 100 ans. — on en déduirait pour le $\odot$, $\frac{r}{R} = \sin \varpi = \sin 10''$: il a fait 1''½ d'erreur. — Maintenant, les Anglais de Greenwich et du Cap ont trouvé 9''. — Cela donne une grande différence sur R.

Au lieu de Mars, on peut employer Vénus. Ce sont les deux seules planètes dont on puisse se servir pour déterminer R. Cela tient à ce qu'elles donnent des parallaxes sensibles. — Pour Vénus, à la même Époque, on a trouvé une parallaxe de 10'', en sorte que, jusqu'au commencement de ce siècle, on a cru que la parallaxe du soleil ne devait pas différer beaucoup de 10''. — Cependant, il y a des cas plus ou moins favorables pour faire ces observations, et nous les discuterons complètement plus tard. Nous indiquerons seulement le phénomène qui a paru le plus favorable pour déterminer la parallaxe de Vénus, et par suite, celle du soleil. — On choisit l'instant où Vénus est à son nœud, et à une conjonction inférieure: ce sont des Époques très-rares. On voit Vénus se projeter sur le soleil, et, au lieu de λ du vernier, on prend le soleil.

On a trouvé pour le $\odot$

$$\varpi = 8'',57 \qquad \pm 0'',037$$

d'où

$$\sin 8'',57 = \frac{r}{d} = 8'',57 \sin 1'' = 8'',57 \cdot \frac{1}{206265}$$

$$d = 24068\ r.$$

Voyons la variation qui peut résulter de l'incertitude 0",037. On a

$$d = \frac{206265}{8,57} r$$

$$d.d = \pm \frac{206265}{(8,57)^2} r \, d.8,57$$

$$= \pm \frac{206265}{(8,57)^2} r . 0'',037$$

$$d.d = d.\frac{0,037}{8,57} = \frac{1}{214} d \text{ à peu près.}$$

Cette très petite différence sur d, conclue du passage de Vénus, répond à ± 110 r. donc $d = (24068 \pm 110) r$. — C'est une incertitude assez petite.

Pour la Lune

$$\varpi = 57' \, 2''$$

L'incertitude est de 1" au moins. Cependant, cela ne fait pas 10 lieues.

En astronomie, on n'a jamais besoin de ces distances exactes, mais seulement de leurs rapports. Il faut donc admirer plutôt sous le point de vue spéculatif la précision avec laquelle on en obtient ces distances : l'exactitude plus grande encore des rapports est plus remarquable. 0",04, c'est peu de chose.

La suite de ce cours n'a pas été à ma disposition.

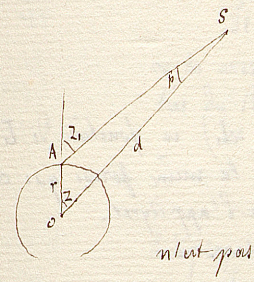
Nilley.

Astronomie et Géodésie..

Extraits du cours de Géodésie de l'Ecole Polytechnique 1852-1853.
par Mr. Faye.

[illegible]

Sur la Parallaxe.



La formule connue

$$\sin p = \frac{r}{d} \sin Z_1, \qquad (1)$$

n'est pas la seule utile.

On a encore

$$p = Z_1 - Z$$

d'où

$$\sin Z_1 = \sin(p+Z) = \sin p \cos Z + \cos p \sin Z$$

remplaçant $\sin Z_1$ par sa valeur, on a

$$\frac{d}{r} \sin p = \sin p \cos Z + \cos p \sin Z$$

d'où

$$d \operatorname{tg} p = r \cos Z \operatorname{tg} p + r \sin Z$$

$$\operatorname{tg} p = \frac{r \sin Z}{d - r \cos Z}. \qquad (2).$$

Cette formule (2) répond à 3 cas principaux :

1°. On connaît par le calcul le Z d'un astre, et l'on veut en déduire le Z_1 qu'on devra observer à la surface de la Terre.

2°. Réduction au centre de la station, en Géodésie ;

3°. Effets de l'excentricité dans les cercles divisés.

Cette formule (2) peut se développer en série. — On remplace pour cela $\sin p$, $\cos p$, $\sin z$ et $\cos z$ par leurs expressions en exponentielles imaginaires : on pose $\alpha = \frac{r}{d}$; et, après quelques réductions fort simples, il vient

$$e^{2p\sqrt{-1}} = \frac{1 - \alpha e^{-z\sqrt{-1}}}{1 - \alpha e^{z\sqrt{-1}}}$$

Prenant les logarithmes de part et d'autre, et développant en série ceux du second membre :

$$p = -\alpha \frac{e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{e^{-2z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} - \dots$$
$$+ \alpha \frac{e^{z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{e^{2z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \dots$$

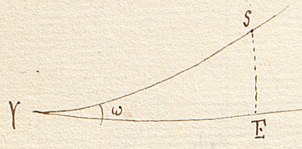
ce qui revient à

$$p = \alpha \sin z + \frac{1}{2}\alpha^2 \sin 2z + \frac{1}{3}\alpha^3 \sin 3z + \dots$$

Voici une application de ce mode de développement qui se présente souvent dans la théorie du Soleil et des Planètes.

Réduction à l'Ecliptique.

Soient γS l'Ecliptique et γE l'Equateur, ω l'obliquité de l'Equateur, S la position du Soleil à un instant donné; γS est sa longitude L, et γE son ascension droite AR. La Relation entre ces deux Coordonnées est



$$\mathrm{Tg}\,\mathrm{AR} = \mathrm{Cos}\,\omega\ \mathrm{Tg}\,L.$$

Or il est aisé d'en déduire $\mathrm{Tg}(\mathrm{AR} - L)$ en fonction de L, et, comme cette fonction peut prendre la même forme que celle de $\mathrm{Tg}\,p$ en z (p. 271), le même développem^t. en Série pourra s'appliquer.
En effet, écrivons avec des Symboles plus Généraux

$$\mathrm{Tg}\,y = m\,\mathrm{Tg}\,x$$

d'où

$$\mathrm{Tg}(y-x) = \frac{\mathrm{Tg}\,y - \mathrm{Tg}\,x}{1+\mathrm{Tg}\,y\,\mathrm{Tg}\,x} = \frac{(m-1)\,\mathrm{Tg}\,x}{1+m\,\mathrm{Tg}^2 x} = \frac{(m-1)\,\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Cos}^2 x + m\,\mathrm{Sin}^2 x}$$

or on a $\mathrm{Sin}^2 x = \frac{1}{2}(1-\mathrm{Cos}\,2x)$, $\mathrm{Cos}^2 x = \frac{1}{2}(1+\mathrm{Cos}\,2x)$; donc

$$\mathrm{Tg}(y-x) = \frac{\frac{m-1}{m+1}\,\mathrm{Sin}\,2x}{1-\frac{m-1}{m+1}\,\mathrm{Cos}\,2x}$$

d'où (voir la p. précédente)

$$y - x = \frac{m-1}{m+1}\,\mathrm{Sin}\,2x + \frac{1}{2}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2 \mathrm{Sin}\,4x + \frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3 \mathrm{Sin}\,6x + \cdots$$

Pour revenir à la Réduction à l'Ecliptique, il suffit de poser

$$m = \mathrm{Cos}\,\omega, \quad \text{et} \quad \frac{m-1}{m+1} = \frac{\mathrm{Cos}\,\omega - 1}{\mathrm{Cos}\,\omega + 1} = -\mathrm{Tg}^2\tfrac{1}{2}\omega.$$

Il vient alors

$$\mathrm{AR} - L = -\mathrm{Tg}^2\tfrac{1}{2}\omega\ \mathrm{Sin}\,2L + \tfrac{1}{2}\mathrm{Tg}^4\tfrac{1}{2}\omega\ \mathrm{Sin}\,4L - \tfrac{1}{3}\mathrm{Tg}^6\tfrac{1}{2}\omega\ \mathrm{Sin}\,6L + \cdots$$

Formules où les arcs figurent en même temps
que leurs Sinus, Tangentes, etc.

Il y a là une précaution à prendre, c'est de tout rapporter à la même unité: or les arcs sont exprimés en parties de la circonférence, et les Sin. Tg. etc. le sont en parties du Rayon. — Il suffit de connaître le rapport de ces unités.
Or

$$\text{arc } 1'' = \frac{2\pi r}{1296000} = \frac{1}{206265}\, r$$

Réciproquement, $r = 206265 . \text{arc } 1''$.

Remarquez que $\text{arc } 1'' = \sin 1''$ sensiblement.

Pour exprimer un arc en parties du Rayon, multiplier le nombre de secondes qu'il contient par $\frac{1}{206265} = \sin 1''$.

Pour exprimer en secondes un arc donné en parties du Rayon, multiplier-le par $206265 = \frac{1}{\sin 1''}$

Par ex. pour calculer la série

$$p = \alpha \sin z + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \sin 2z + \ldots$$

où α est abstrait, et p un arc qu'on désire avoir en secondes, écrivez

$$p = 206265'' \alpha \sin z + \tfrac{1}{2} 206265'' \alpha^2 \sin 2z + \ldots$$

ou

$$p = \alpha \frac{\sin z}{\sin 1''} + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \frac{\sin 2z}{\sin 1''} + \ldots$$

De même, pour calculer $\sin x$ par la série connue

$$\sin x = x - \frac{1}{2.3} x^3 + \frac{1}{2.3.4.5} x^5 - \ldots$$

on écrira

$$\sin x = \frac{x}{206265} - \frac{1}{2.3}\left(\frac{x}{206265}\right)^3 + \ldots$$

ou

$$\sin x = x \sin 1'' - \frac{1}{2.3}\left(x \sin 1''\right)^3 + \ldots$$

x étant donné en secondes.

Éléments Divers Relatifs au Soleil.

Parallaxe Horizontale du Soleil, à la Distance moyenne . . . . $8'',56 \pm 0'',04$
Diamètre apparent, à la Distance moyenne . . . . $32'$.
Excentricité de l'orbite Terrestre, environ . . . . $\frac{1}{60}$
Masse du Soleil, celles de la Terre et de la Lune Réunies formant l'Unité 355500
" celle de la Terre étant 1 359500
on en déduit aisément la plupart des Résultats suivants : (r désigne le Rayon Equatorial de la Terre, $r = 6\ 377\ 398^m$).
Distance moyenne du Soleil (153 millions de Kilom.) . . . . 24 068 $r \pm 112 r$
Temps Employé par la Lumière à franchir cette Distance . . . . $8^m\ 18^s$
Distance du Centre de l'orbite Terrestre au Foyer . . . . 401 r
Distance Périgée (vers le 1er Janvier) . . . . 23 667 r
" apogée (" 2 Juillet) . . . . 24 469 r
Diamètre apparent au Périgée . . . . $32'\ 32''$
" " à l'apogée . . . . $31'\ 28''$
" " du Soleil vu de α du Centaure . . . . $0'',0085$
Cette Etoile est la plus proche parmi celles dont la parallaxe est Connue : sa Distance est Egale à 270 000 fois celle de la Terre au Soleil.
Rayon du Soleil . . . . 112 r
Volume du Soleil, celui de la Terre étant 1, ... 1 400 000
Ce volume est 600 fois plus grand que celui de Toutes les planètes Réunies.
La masse du Soleil est 720 fois plus grande que celle de toutes les planètes réunies.
Densité moyenne du Soleil, celle de la Terre étant 1, ... 0,25
" " " de l'Eau " 1,4
Intensité de la pesanteur à la Surface . . . . 28 g.
Durée de la Rotation apparente (Incertaine) . . . . $27^j,5$
" " réelle (id.) . . . . $25^j,5$
Inclinaison de l'Equateur Solaire sur l'Ecliptique . . . . $7°$
aplatissement, insensible.
Les Bords du Soleil sont moins Lumineux que le Centre.
La Zone Equatoriale paraît être un peu plus chaude que les Régions Polaires.
Les Taches n'apparaissent Jamais dans les Régions Polaires.
Le Diamètre apparent de la Terre, vue du Soleil, serait de $8'',57 \times 2 = 17''$ environ. Souvent les Taches sont beaucoup plus Grandes.

Formules de transformation de coordonnées.

Soient en Général AR et δ les coordonnées Equatoriales d'un astre
" L et β " Ecliptiques "
et ω l'angle des axes de l'Equateur et de l'Ecliptique. on aura :

$$(I)\begin{cases} \cos\beta = \cos\omega\cos\delta - \sin\omega\sin\delta\sin AR & (1) \\ \sin\beta\sin L = \sin\omega\cos\delta + \cos\omega\sin\delta\sin AR & (2) \\ \sin\beta\cos L = \sin\delta\cos AR & (3) \end{cases}$$

$$(II)\begin{cases} \cos\delta = \cos\omega\cos\beta + \sin\omega\sin\beta\sin L & (4) \\ -\sin\delta\sin AR = \sin\omega\cos\beta - \cos\omega\sin\beta\sin L & (5) \\ \sin\delta\cos AR = \sin\beta\cos L & (6) \end{cases}$$

Pour le Soleil, $\beta = 90°$: ces Relations deviennent donc

$$(III)\begin{cases} \mathrm{Tg}\,\omega\,\mathrm{Tg}\,\delta\sin AR = 1 & (7) \\ \mathrm{Tg}\,AR = \cos\omega\,\mathrm{Tg}\,L & (8) \\ \cos\delta = \sin\omega\sin L & (9) \end{cases}$$

Mouvements du ☉ dans son orbite.

Hypothèse Circulaire.

Soit L_0 la Longitude à l'instant pris pour origine. La Longitude à l'époque t, comptée en jours, sera

$$L = L_0 + \frac{360°}{T}t = L_0 + nt$$

T est l'année tropique. – n est le mouvement diurne du ☉ en Longitude, ou l'accroissement de cette longitude au bout d'un jour sidéral :

$$n = \frac{1296000''}{366,2422} = 58'\ 58'',64$$

Une observation suffit pour déterminer L_0. On trouverait ainsi

$$L_0 = 280°\ 46'\ 36''$$

La date correspondante, origine du Temps, étant le commencement de 1850. – À cela, il faut joindre la valeur de ω

$$\omega = 23°\ 27'\ 32''$$

Cette hypothèse est inadmissible. – écarts de 1° 55'

Hypothèse de l'excentrique.

Lois de Kepler. – Mouvement Elliptique.

Des deux premières lois, on déduit (S étant la surface décrite)

$$\frac{S}{t} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T} \quad \text{et} \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(L-\varpi)}$$

$L - \varpi$ est ici l'anomalie vraie : c'est la Longitude comptée à partir du Périgée.

Le problème que Kepler a dû résoudre est de calculer $L-\varpi$ et r pour une

date quelconque t. — La solution consiste à introduire un angle auxiliaire E (anomalie excentrique), donné par la relation

$$E - e\sin E = L_0 + nt - \varpi = \text{anomalie moyenne}.$$

on trouve alors aisément

$$r = 1 - e\cos E$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(L-\varpi) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E$$

Cette solution de Képler est encore employée pour les planètes nouvellement découvertes et pour les comètes dont l'orbite est elliptique.

Mais quand il s'agit des tables astronomiques des planètes anciennes, on a recours à des développements en série procédant suivant les puissances croissantes de e, et suivant les sinus ou les cosinus des multiples successifs de l'anomalie moyenne $L_0 + nt - \varpi$. Les séries sont alors très-convergentes, parce que les excentricités des orbites des grandes planètes sont très-faibles.

En différentiant la 1ère équation, on trouve

$$ds = \frac{1}{2} r^2 dL = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}\, dt$$

Éliminez r, et posez $\frac{2\pi}{T} = n$ = moyen mouvement diurne du ☉ en longitude, il viendra

$$\frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{\{1+e\cos(L-\varpi)\}^2}\, dL = n\,dt = d.nt$$

après avoir développé $d.nt$ en série procédant suivant les puissances des cosinus de $L-\varpi$ et remplacé celles-ci par les cos. des multiples de $L-\varpi$, on pourra intégrer et obtenir nt, ou, avec la constante, $L_0 + nt - \varpi$, en série de sinus des multiples de $L-\varpi$. Puis, par le retour des suites (méthode des coefficients indéterminés et des différentiations successives), on aura $L-\varpi$ développé en série suivant les sinus de l'anomalie moyenne $L_0 + nt - \varpi$.

On procédant de même pour le développement de r ou de $\operatorname{Log} r$ suivant les cosinus du même argument. — Cette méthode est très-simple quand il s'agit d'obtenir les trois ou quatre premiers termes de ces séries. — Elle nous donne

$$L = L_0 + nt + 2e\sin(L_0 + nt - \varpi) + \frac{5}{4}e^2\sin 2(L_0 + nt - \varpi)$$

$$\operatorname{Log\,hyp.} r = \frac{1}{4}e^2 - e\cos(L_0 + nt - \varpi) - \frac{3}{4}e^2\cos 2(L_0 + nt - \varpi)$$

ce qui suffit pour l'orbite solaire. — Quand il s'agit d'orbites plus excentriques, il faut pousser beaucoup plus loin ces développements, et dans ce cas, la méthode précédente devient trop pénible. On trouvera dans la Mécanique céleste d'autres méthodes plus générales et plus puissantes.

Voici les développements plus étendus de L et de r. — En faisant

$$m = L_0 + nt - \varpi$$

on a

$$L = L_0 + nt + A_1\sin m + A_2\sin 2m + A_3\sin 3m + \cdots$$

où :

$$A_1 = 4\left(\frac{e}{2}\right) - 2\left(\frac{e}{2}\right)^3 + \frac{5}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^5 + \cdots \qquad A_2 = 5\left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{22}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \cdots$$

$$A_3 = \frac{26}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^3 - \frac{43}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^5 + \cdots \qquad A_4 = \frac{103}{6}\left(\frac{e}{2}\right)^4 \cdots \qquad A_5 = \frac{1097}{30}\left(\frac{e}{2}\right)^5 \cdots$$

Quant au rayon vecteur r, on a

$$\frac{r}{a} = 1 + 2\left(\frac{e}{2}\right)^2 - B_1 \cos m - B_2 \cos 2m - B_3 \cos 3m - \ldots$$

$$B_1 = 2\left(\frac{e}{2}\right) - 3\left(\frac{e}{2}\right)^3 + \frac{5}{6}\left(\frac{e}{2}\right)^5 \ldots \qquad B_2 = 2\left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{16}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \ldots$$

$$B_3 = 3\left(\frac{e}{2}\right)^3 - \frac{45}{4}\left(\frac{e}{2}\right)^5 + \ldots \qquad B_4 = \frac{16}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^4 - \ldots \qquad B_5 = \frac{125}{12}\left(\frac{e}{2}\right)^5 + \ldots$$

Si l'on veut calculer à $0'',1$ près, il faut aller jusqu'aux termes en e^5 pour Mars, et jusqu'aux termes en e^9 pour Mercure. – Pour le ☉, les termes en e^3 suffisent.

Énumération et Détermination des Éléments Elliptiques de l'Orbite Solaire.

1°. Ascension droite provisoire du Point Vernal γ.

2°. Obliquité de l'Écliptique ω.

3°. Durée de la Révolution Tropique T, d'où $n = \frac{2\pi}{T}$

4°. Longitude moyenne à l'origine du Temps, L_0 (au 1er Janvier 1850, Midi moyen).

5°. Longitude du Périgée ϖ.

6°. Excentricité e, le Demi Grand axe a (Distance moyenne entre les distances apogée et périgée) étant pris pour Unité.

Il ne nous reste plus qu'à déterminer L_0, ϖ et e. Trois observations méridiennes du ☉ suffiront. Ces trois observations, faites aux dates t, t', t'', comptées à partir de l'origine du temps en jours sidéraux, donneront R, R' et R''. De là on tirera les longitudes correspondantes L, L', L'' par la formule

$$\operatorname{Tg} R = \operatorname{Tg} L \cos \omega$$

Puis on formera les trois Équations suivantes, en négligeant provisoirement les termes en e^2, etc.

$$\left.\begin{aligned} L &= L_0 + nt + 2e \sin(L_0 + nt - \varpi) \\ L' &= L_0 + nt' + 2e \sin(L_0 + nt' - \varpi) \\ L'' &= L_0 + nt'' + 2e \sin(L_0 + nt'' - \varpi) \end{aligned}\right\}$$

Pour les résoudre, on posera

$$\left.\begin{aligned} 2e \sin(L_0 - \varpi) &= x \\ 2e \cos(L_0 - \varpi) &= y \end{aligned}\right\}$$

et l'on aura, en développant les Sinus dans les 3 Équations précédentes, trois Éq. linéaires entre L_0, x et y. On recommencera ensuite le même calcul en tenant compte cette fois des termes en e^2, au moyen de la valeur approchée que cette première solution aura fournie pour e.

Il faudra discuter l'Équation de condition à l'aide de sa différentielle

$$dL = \{1 + e \cos(L_0 + nt - \varpi)\} dL_0 + 2 \sin(L_0 + nt - \varpi) de - 2 \cos(L_0 + nt - \varpi) e d\varpi$$

et en conclure les Époques de l'année les plus favorables à la détermination des inconnues L_0, ϖ et e.

Détermination définitive de ces 3 Éléments à l'aide d'un Grand nombre d'observations. – Voici les Résultats : Époque 1850,0

$$\left\{\begin{aligned} L_0 &= 280^\circ \; 46' \; 36'',12 \\ \varpi &= 280 \;\; 21 \;\; 40 \\ e &= 0,0167705 = \frac{1}{60} \text{ environ.} \end{aligned}\right.$$

Remarque sur la forme presque circulaire de l'orbite solaire ; son aplatissement comparé à celui des méridiens terrestres.

Détermination de la longueur de l'année. — En comparant les valeurs de L_0 ainsi obtenues à deux époques très-distinctes, 1750 et 1850 par exemple, et en tenant compte des circonférences parcourues, on aura le moyen mouvement du ☉ en 100 ans, et par suite T ou n avec une très-grande exactitude.

Il est facile maintenant de calculer les coordonnées écliptiques et par suite les coordonnées équatoriales du ☉ pour un instant donné. — Pour simplifier encore les calculs, on a réduit en tables ces formules, ainsi que les perturbations planétaires dont nous ne tenons pas compte, en sorte que le calcul d'un lieu du ☉ pour une date donnée se trouve finalement ramené à de simples additions de nombres que l'on prend à vue dans plusieurs tableaux successifs. On a en effet :

Longitude vraie = Longitude moyenne + Eq. du Centre + Perturbations

$$L = L_0 + nt \quad + 2e\sin(L_0 + nt - \varpi) + \text{etc.} + \ldots$$

Quant à l'Æ du ☉ elle est égale à la longitude plus la réduction à l'équateur, et la distance polaire δ s'obtient par la formule

$$\cos\delta = \sin\omega \sin L.$$

ou par des séries équivalentes.

L'accord de cette théorie avec les observations est complet lorsqu'on tient compte des perturbations planétaires et des variations séculaires dont tous les éléments, sauf le demi-grand-axe, sont affectés.

Temps solaire vrai et moyen.

Soit T la durée de l'année tropique en jours sidéraux
" N " " " jours solaires vrais.

on a

$$T = 366,24222$$

et

$$N = 365,24222$$

La durée du jour moyen est donc

$$1 \text{ jour moyen} = \frac{366^{j.\,sid.},24222}{365,24222} = 1^{j.s.},00273208 = 24^h\,3^m\,56^s,555$$

Rem. Le jour moyen excède donc de 4^m environ les 24^h du jour sidéral, et par suite, 6 min. de temps moyen valent $6^m\,1^s$ de temps sidéral. Ainsi de 6^m en 6^m, une pendule de temps moyen aura perdu une seconde par rapport à une pendule sidérale. En d'autres termes, les deux pendules ont leurs battements coïncidant de 6^m en 6^m. De là un moyen très-exact de les comparer.

Nous prendrons désormais le jour moyen pour unité ; alors

$$n = 59'\,8'',33.$$

Concordance du Temps vrai et du Temps moyen.

L'heure vraie est l'angle horaire du ☉ vrai, exprimé en temps.

L'heure moyenne " " " moyen, "

Donc la différence de ces heures est égale à celle de ces angles horaires, et par conséquent à la différence des ascensions droites de ces deux mobiles, prise en signe contraire, car celles-ci se comptent en sens inverse des angles horaires.

D'autre part,

Æ ☉ vrai = Æ ☉ moyen = Eq. du centre + Réduct. à l'Equateur.

Si nous désignons cette différence périodique, exprimée en temps, par le nom d'Equation du temps, nous aurons

Heure moyenne − Heure vraie = Equation du Temps.

L'observation du ☉ donne l'heure vraie; il faudra y ajouter l'Eq. du temps pour avoir l'heure moyenne correspondante.

Les Ephémérides astronomiques donnent l'Eq. du temps calculée de jour en jour pour midi vrai: on en déduit sa valeur pour une autre heure vraie quelconque par interpolation.

Discussion de l'Equation du temps. − Epoques où ses deux parties prises ensemble et séparément deviennent nulles.

Concordance du Temps moyen et du Temps sidéral.

L'heure sidérale est l'angle horaire du point vernal, exprimé en temps.

" Moyenne " " ☉ moyen, "

Donc la différence de ces heures est égale à celle des angles horaires, et par conséquent à la différence des ascensions droites, prise en signe contraire.

Or l'Æ de γ est 0 et celle du ☉ moyen est $L_0 + nt$. Donc

Heure moyenne = Heure sidérale − $(L_0 + nt)$.

L'observation d'une étoile quelconque donne l'heure sidérale; il faut en retrancher l'Æ du ☉ moyen, au même instant, pour avoir l'heure moyenne correspondante.

Les Ephémérides astronomiques donnent $L_0 + nt$ calculé de jour en jour pour midi moyen; on en déduit par interpolation sa valeur pour un autre instant quelconque.

Il y a une époque dans l'année (vers l'équinoxe du printemps) où $L_0 + nt$ est nul. alors, mais pour un instant seulement, l'heure sidérale s'accorde avec l'heure moyenne.

Durée des Jours et des Nuits.

Crépuscules − Saisons − Climats.

La durée de la présence d'un astre, dont la distance polaire est δ, sur l'horizon d'un lieu dont la colatitude est λ, est égale (en négligeant la réfraction, la parallaxe horiz. du ☉, son ½ diam. angul. et enfin l'altitude de l'observateur) à l'arc diurne 2AH (faire la fig.) réduit en temps, AH étant tiré de la formule

$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos AH$$

dans laquelle on fait $Z = 90°$ et $\cos Z = 0$.

Il n'y a qu'à discuter cette expression pour le Soleil, dont les δ varient de $90° - \omega$ à $90° + \omega$, et l'on aura toutes les circonstances qui règlent l'illumination diurne d'un lieu donné.

Quant aux questions relatives aux Crépuscules, on fera

$$Z = 90° + 18° \quad \text{ou} \quad Z = 90° + 16°$$

suivant l'hypothèse admise sur la hauteur à laquelle le Soleil doit se trouver au-dessous de l'horizon pour que le crépuscule cesse ou commence.

Par la 1ère formule, on voit que AH peut devenir imaginaire dans les lieux où $\lambda < \omega$ ou $> 180° - \omega$, c.a.d. pour les deux Zones polaires ou Glaciales. alors le ☉ devient momentanément circumpolaire, le lever ou le coucher de cet astre ne dépendent plus du mouvement diurne, mais des seules variations de δ, c.a.d. du mouvement annuel.

S'il s'agit des **Saisons** et des **Climats**, et de la Quantité de chaleur diurne ou annuelle que le ☉ verse sur un horizon donné, il faut tenir compte, et de la durée variable de la présence du ☉ sur l'horizon, et surtout de sa hauteur méridienne. on prendra donc encore la formule connue

$$(Z) = \delta - \lambda$$

Cette discussion n'aboutira qu'à une Théorie astronomique des Climats, dont la distribution se réglerait uniquement sur les Latitudes Géographiques. En fait la distribution des températures diurnes et annuelles, à la surface du Globe, est puissamment modifiée par d'autres conditions physiques, telles que l'altitude du lieu, et surtout la répartition des mers et des terres, les courants Océaniques, les vents régnants, etc.

Théorie des Mesures.

Instruments destinés à mesurer les Coordonnées angulaires.

Lunettes astronomiques.

Comme les Lunettes astronomiques renversent les objets, il est essentiel de ne pas commettre de méprise sur ce point; on les évite en ne consignant sur les Carnets d'observation que les apparences, telles que la Lunette les donne, sans se préoccuper de les rectifier.

Ainsi quand on lit dans un recueil d'observations astronomiques ou Géodésiques des indications de ce genre: Soleil, bord supérieur, il s'agit du bord supérieur du disque vu dans la Lunette, en sorte que l'observation se rapporte en réalité au bord inférieur du Soleil. Cette règle pratique, de toujours noter les apparences, permet d'éviter la confusion que le renversement des images pourrait sans cela introduire dans les registres d'observations.

Il est évident que le sens du mouvement diurne des astres sera également renversé (en même temps que sa vitesse sera amplifiée) dans les Lunettes: à l'œil nu, il s'effectue de Gauche à droite, l'observateur faisant face au Sud; on le verra donc les astres entrer par la droite dans le champ de la Lunette, et le traverser de droite à Gauche.

La Lentille de Crown (l'antérieure, la biconvexe) et celle de Flint (la biconcave) dont un objectif achromatique se compose ordinairement, doivent être centrées sur le même axe. Si ce centrage est défectueux, les images ne sont pas nettes; les étoiles par ex. paraissent alors allongées dans un sens. En centrant convenablement les lentilles sur un même axe de figure, on fait disparaître ce défaut capital. Les opticiens ont pour cela des procédés fort exacts, fondés sur l'emploi du Tour.

Mais il faut se garder de confondre cet axe de figure de l'objectif avec ce que l'on nomme axe optique, Ligne de visée ou Ligne de Collimation.

Les Lunettes remplacent pour nous les Pinnules ou Dioptres dont les anciens se servaient pour viser aux astres, et dont on retrouve encore quelques exemplaires dans de vieux Graphomètres, ou dans l'instrument plus utile que l'on nomme Equerre d'arpenteur. Avec ces instruments-là, on mesure les angles à quelques minutes près à l'œil nu (1), tandis que l'application des lunettes aux cercles divisés permet de porter aux secondes, ou même à de très-petites fractions de la seconde, la précision des mesures angulaires.

---

(1). La plus extrême perfection des mesures faites à l'œil nu ne dépasse pas 1'. C'est là que Tycho-Brahé était parvenu (au XVIe Siècle), et la Science des mesures n'aurait jamais dépassé sur ce point l'exactitude de l'astronome Danois, sans l'invention des Lunettes.

Pour mesurer exactement, il faut d'abord voir nettement; or l'œil ne peut voir à la fois avec netteté à des distances très-diverses. S'il s'accommode pour la vision nette à de grandes distances, il ne verra pas très-distinctement la croisée des fils de l'alidade, et réciproquement. À la vérité, la vision devient plus nette quand on regarde au travers de très-petites ouvertures, comme celles des pinnules, et l'on peut distinguer alors à peu-près également bien des objets très-différemment éloignés, mais aussi on perd une grande quantité de lumière par ce mode de vision à travers des orifices plus étroits que la pupille.

Les Lunettes au contraire procurent un triple avantage qui explique la précision extraordinaire des mesures modernes:

1°. Elles amènent sur le même plan, à la même distance de l'œil, et juste à la portée précise de la vision distincte, l'objet visé et le point de mire (croisée des fils).

2°. Elles augmentent la puissance optique de l'œil en ce sens qu'elles font pénétrer dans cet organe, et concourir à la formation des images, une quantité de lumière plus grande que celle dont l'ouverture de la pupille permettait l'entrée à l'œil nu.

3°. Elles amplifient les dimensions apparentes ou angulaires des objets, depuis les grossissements de 5 ou 6 fois (Lunettes du Sextant) jusqu'à ceux de 1000 et même de 2000 fois (Lunettes astronomiques ou grands télescopes modernes).

On discute encore sur ces questions relatives à la visibilité par les Lunettes; les Physiciens ou les astronomes ne sont pas tombés d'accord sur toutes les questions qui s'y rattachent; mais il n'y a pas l'ombre d'un doute sur l'emploi des Lunettes pour définir une direction. — cette application est fondée sur l'existence d'un point appelé Centre optique de l'objectif, dont voici la propriété caractéristique.

Soit l'objet AB dont l'image produite par un objectif se forme en ab. Si l'on joint par des droites les points A, B.. de l'objet aux points correspondants a, b,.. de l'image, ces droites Aa, Bb,.. se coupent toutes en un même point O qui porte le nom de Centre optique de l'objectif, point dont la position dépend des courbures et des indices des Lentilles de cet objectif. (1)

Concluons de là que si l'on incline diversement l'objectif en le faisant tourner autour du centre optique O, l'image ab restera immobile. Si on le faisait tourner autour d'un autre point, l'image ab se déplacerait. De là on déduit un procédé pour déterminer expérimentalement la position du point O, à partir duquel doit se compter la longueur focale de l'objectif.

Ainsi, en tirant une droite de l'image d'un objet au centre optique de la Lunette, cette droite aboutit nécessairement à l'objet; et pour fixer cette droite, dont un point est déjà déterminé par le centre optique de l'objectif, il suffira de marquer le lieu de l'image par quelque signe matériel, tel

---

(1) Quand on masque une partie de l'objectif, on ne déforme pas les images, en général, on les affaiblit seulement, et le centre optique subsiste. Les astronomes se servent même quelquefois de lunettes dont l'objectif a été coupé en deux, et qu'on nomme Héliomètres; quand on sépare les deux moitiés, en les faisant glisser le long de leur section, on obtient deux images du même objet, et l'on met ces images en contact lorsqu'il s'agit d'en mesurer le diamètre angulaire.

qu'une croisée de fils très-fins.

On appelle axe optique d'une lunette la ligne idéale qui joint le centre optique de l'objectif à un point choisi dans le plan focal où viennent se former les images, et défini là par une croisée de fils. Ces fils doivent être fixés au tube de la lunette, et, par cet intermédiaire, invariablement reliés à l'objectif lui-même.

Pour diriger cet axe optique, cette ligne de visée ou de collimation, sur un objet quelconque, il suffit donc d'amener l'image de l'objet sur la croisée des fils du réticule, en déplaçant angulairement le tube de la lunette. Quand on fait tourner ainsi la lunette, et avec elle l'axe optique ou la ligne de visée, on fait tourner de la même quantité l'alidade qu'elle porte dans tous les instruments de mesure; les déplacements de l'alidade indiqueront ceux de l'axe optique, et fourniront la mesure des angles parcourus par cet axe, lorsqu'on l'amènera successivement dans la direction de divers objets.

En déplaçant le réticule (à l'aide de ses vis), on peut faire varier à volonté la position de l'axe optique de la lunette; mais il y a là une limite qu'il ne faudrait pas dépasser. La règle est de ne pas l'écarter trop de l'axe de figure de l'objectif, avec lequel il vaudrait mieux le faire coïncider, si cela était toujours possible. C'est qu'en effet l'existence d'un centre optique dans un objectif dépend de la condition que les rayons admis à former l'image focale n'auront sur l'axe de figure qu'une incidence d'un petit nombre de degrés. Si les objets s'écartaient trop de cet axe de figure, les lignes menées de ces objets à leurs images ne se couperaient plus en un seul et même point.

Quant à l'oculaire qui reste, comme on voit, en dehors de cette théorie, il faut tâcher que son axe de figure propre coïncide avec celui de l'objectif, ou du moins ne s'en écarte pas beaucoup. Il sert uniquement à voir de plus près, comme avec une loupe, les images des objets et les fils tendus dans le plan où ces images viennent se former.

Oculaires positifs et négatifs. – Exclusion de ces derniers lorsque la lunette est armée d'un réticule.

Description des divers réticules. Procédés usités pour y tendre des fils. Choix des fils d'araignée. Fabrication des fils de platine. Les fils fins échappent à l'action des rayons solaires bien qu'ils soient tendus dans le plan où se forme l'image focale du soleil.

Comment on s'assure que les fils sont bien dans le plan focal. Les images des objets très éloignés se forment sensiblement dans le plan focal principal, où les fils se trouvent placés d'ordinaire. A quelle limite de distance un objet doit-il se trouver pour qu'on puisse compter sur cette coïncidence, dans une lunette de longueur donnée?

Mesure du champ et du grossissement.

Examen et épreuve de la bonté d'une lunette sous le triple rapport de l'achromatisme, de l'aberration de sphéricité, et du centrage des lentilles.

Précautions à prendre pour nettoyer les verres.

Des Collimateurs. – Quand on regarde à l'œil nu dans une lunette par l'objectif, on ne voit pas son réticule. Pour le voir, il faut armer l'œil d'une autre lunette disposée pour les objets situés à l'infini. Quand deux lunettes sont ainsi pointées l'une sur l'autre de manière que l'image de la croisée des fils de l'une coïncide avec la croisée des fils de l'autre, leurs axes optiques ont la même direction: ils sont parallèles ou ils coïncident. – Dans une foule d'opérations géodésiques ou astronomiques, on a besoin de définir d'une manière permanente une direction qu'on prend pour origine. Cela se fait soit au moyen d'une mire très-éloignée, soit avec un collimateur qu'on peut mettre aussi près qu'on veut.

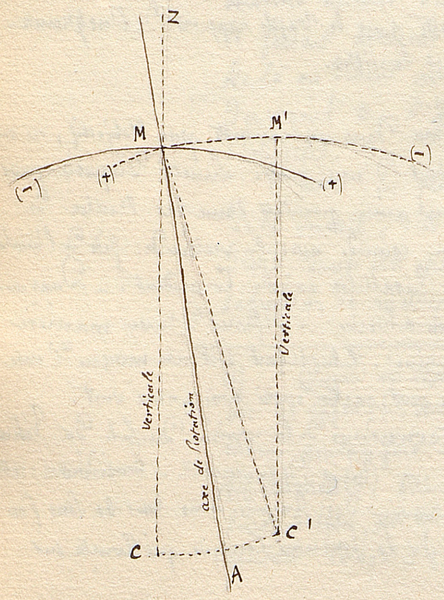
Verticalité de l'axe optique assurée par la coïncidence de la croisée des fils du réticule avec l'image de ces fils vus par réflexion dans un bain de mercure. – Considérons cette croisée des fils comme un point lumineux qui envoie des rayons dans tous les sens (on a soin, en effet, d'illuminer fortement les fils du réticule). Le faisceau conique qui tombe sur

l'objectif est transformé par réfraction en un faisceau de rayons parallèles entre eux et parallèles à l'axe optique. après avoir été réfléchi par la surface parfaitement plane et horizontale du bain de mercure, le faisceau cylindrique revient sur l'objectif, qui le réfracte comme s'il venait d'un point situé à l'infini. Il va donc former image au plan focal principal, et l'axe de ce nouveau faisceau, c'est à dire la ligne qui joint l'image au centre optique, a précisément la direction des rayons parallèles que le bain de mercure renvoie à l'objectif. Si les axes de ces faisceaux coïncident, c.a.d. si l'image des fils se forme sur les fils même et non à côté, c'est que les axes sont perp. à la surface horizontale du miroir. — Cette curieuse propriété, dont on fait aujourd'hui un très fréquent usage en Géodésie et en astronomie, permet de déterminer avec une précision extrême la direction de la verticale, beaucoup mieux que le fil à plomb, et tout aussi bien que les niveaux les plus sensibles et les mieux travaillés.

Théorie des Niveaux.

L'arc gradué d'un niveau fait partie d'un cercle dont la grandeur est telle que la division de 1" en 1" y devient praticable, et surtout appréciable à l'œil nu. En vertu des lois de l'hydrostatique, le milieu de la bulle répond, dans chaque position du niveau, au point le plus haut du cercle, et le rayon qui aboutit à ce point est la verticale. Cette verticale n'est pas suffisamment déterminée par le point milieu de la bulle, car l'autre point, le centre, n'est pas donné par la construction de l'appareil. aussi le niveau seul ne suffit pas, comme le fil à plomb, pour indiquer la direction de la pesanteur: il faut encore le combiner avec une opération de retournement autour de la droite dont on veut connaître la direction.

Supposons d'abord qu'il s'agisse de déterminer, à l'aide d'un niveau, l'inclinaison d'un axe de rotation à peu près vertical. Il faudra fixer le niveau à l'axe d'une façon invariable, et de manière qu'ils puissent tourner ensemble sans que ce mouvement de rotation puisse rien changer dans leur position relative: et d'abord, nous admettrons qu'on ait amené le niveau dans le plan vertical qui passe par l'axe.



Soit C le centre inconnu du niveau, et M le milieu de la bulle; le rayon CM est la verticale. — Supposons encore que l'axe de rotation aboutisse précisément au point M, en faisant avec CM le très-petit angle AMC qu'il s'agit de mesurer. Si l'on fait tourner de 180° l'appareil autour de l'axe AM, le niveau prendra une position MM' symétrique de la première; le rayon CM, d'abord vertical, prendra la position MC', faisant avec MC un angle double de l'angle cherché. Le milieu de la bulle viendra se placer en M', point actuellement le plus élevé du niveau, en sorte que le rayon vertical sera C'M'. Or il est évident que l'angle MC'M' double de l'angle cherché AMC, est mesuré par l'arc MM', dont le milieu de la bulle s'est déplacé sur le niveau.

Ordinairement, l'origine des divisions est placée au milieu du tube, et l'on compte comme positives les divisions qui procèdent dans un sens, et comme négatives les divisions du sens opposé. Pour éviter toute confusion, on grave les

Signes + et − aux deux bouts du niveau. Quelle que soit la convention, le milieu de la bulle répond toujours à la moyenne des lectures faites aux deux bouts. Si donc on désigne par a et b ces lectures faites dans la première position, par a' et b' celles qui répondent à la seconde, on aura

$$\tfrac{1}{2}(a+b) = m \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}(a'+b') = m'$$

pour les positions du milieu de la bulle avant et après le retournement ; l'inclinaison de l'axe sera donc mesurée par $\frac{1}{2}(m'-m)$ de ces divisions.

Pour rendre l'axe vertical, il faudra l'incliner de manière à faire marcher le milieu M' de la bulle vers M d'une quantité égale à $\frac{1}{2}$ MM' $= \frac{1}{2}(m'-m)$.

Si l'on convient de regarder l'inclinaison de l'axe de rotation comme positive ou négative suivant que cet axe va percer le ciel du côté marqué − ou du côté marqué + sur le niveau, dans la 1re position, l'expression $\frac{1}{2}(m'-m)$ donnera non seulement l'inclinaison de l'axe, mais encore son signe.

Voici un exemple, ainsi que la disposition adoptée pour l'inscription des observations :

	1re Position de l'axe + à droite de l'observateur	2e. Position de l'axe + à gauche
Extrémités de la bulle	+ 6^p,0 .... a − 12,3 .... b	+ 1^p,3 .... a' − 17,0 .... b'
½ somme = m =	− 3,15	m' = − 7,85

De là on tire

$$i = \tfrac{1}{2}(m'-m) = -2^p,35$$

et le signe − indique que l'axe va percer le ciel à gauche de la verticale de l'observateur. Si une partie du niveau vaut 2'',15 par exemple, l'inclinaison i sera de 5'',05.

Pour corriger cette inclinaison, et rendre l'axe MA vertical, il faudrait agir sur les vis de l'axe, de manière à faire marcher le milieu de la bulle de M' vers M d'une quantité égale à $\frac{1}{2}$MM' $= \frac{1}{2}(m'-m) = -2^p,35$.

On rend ces opérations plus faciles en amenant l'origine des divisions (cette origine est au milieu du tube) à coïncider avec le point M, au milieu de la bulle, lorsque l'axe est vertical. Pour cela, il faut déplacer le niveau lui-même par rapport à l'axe de l'instrument, en agissant sur une vis du niveau. — Voici la succession de ces manœuvres :

1°. on amène à l'aide des vis de l'axe, le milieu de la bulle au milieu des divisions ;

2°. on retourne l'instrument de 180° autour de l'axe : si dans cette seconde position, le milieu de la bulle coïncide encore avec l'origine des divisions, on en conclura que l'axe est horizontal. — Si au contraire le milieu de la bulle s'est écarté du milieu des divisions, on l'y ramènera en faisant faire la moitié du chemin avec les vis de l'axe et l'autre moitié avec celles du niveau.

3°. on replace l'instrument dans sa 1re position afin de vérifier le succès de l'opération. Si le milieu de la bulle n'est pas cette fois à l'origine des divisions, l'écart sera toujours beaucoup moindre que dans le 1er cas, et on le fera aisément disparaître cette fois, moitié avec les vis de l'axe, moitié avec celles du niveau.

L'application du niveau à un axe horizontal ne diffère qu'en un seul point de ce qui précède : c'est le niveau qu'on place sur l'axe, et qu'on retourne bout pour bout, au lieu de retourner l'axe lui-même.

Retourner ainsi le niveau revient du reste à le faire tourner de 180° autour d'une ligne normale à l'axe. C'est donc cette ligne dont on mesurera ou dont on corrigera l'inclinaison sur la verticale. — Or il est évident que cet angle est précisément égal à

l'inclinaison de l'axe lui-même sur l'horizontale.

Le niveau peut servir à mesurer l'angle de deux axes que le constructeur a dû faire perp. l'un sur l'autre. On rend le 1er exactement vertical, puis on mesure l'inclinaison du 2e. sur l'horizontale. — Ce dernier angle est évidemment égal à l'erreur de l'instrument, c'est à dire à la différence entre l'angle des deux axes et 90°.

Valeur des parties du niveau. Différents procédés pour déterminer la valeur angulaire de ses divisions, et pour en vérifier la régularité. Le rayon de courbure du niveau se déduit de la valeur angulaire de ses divisions.

Par exemple, un niveau dont les parties vaudraient 1″ et auraient 1mm de longueur, aurait pour rayon

$$206265 \text{ fois } 1^{mm} \text{ ou } 206^{m},265$$

Construction des niveaux. Niveaux sphériques. Influence de la capillarité sur les mouvements de la bulle. On atténue cette influence en augmentant le diamètre du tube et la longueur de la bulle; mais, dans ces grands niveaux si précis, la bulle emploie un temps considérable pour atteindre sa position d'équilibre. Influence de la température: la moindre différence de chaleur, d'un bout à l'autre du niveau, suffit pour en fausser les indications.

Théorie des Verniers.

Soit n le nombre des divisions d'un vernier appliqué à un limbe divisé; ce vernier permettra d'apprécier les angles à la fraction $\frac{1}{n}$ près de la plus petite division du limbe.

Désignons en effet par D la plus petite division du limbe, et par d celle du vernier. Le constructeur a fait

$$nd = (n-1)D$$

De là on tire

$$D - d = \frac{1}{n}D$$

or la différence de longueur entre la division et celle du vernier est précisément la fraction que le vernier permet d'apprécier. On voit qu'elle est égale à $\frac{1}{n}D$.

Par exemple, les limbes des cercles d'un théodolite de Gambey sont divisés de 10′ en 10′; les verniers ont 60 divisions (qui en comprennent 59 du limbe); on a par conséquent:

$$n = 60 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}D = \frac{10'}{60} = 10''.$$

On peut donc, sur cet instrument, lire les angles à 10″ près. — Avec un peu d'attention, on peut encore aller jusqu'à la moitié de cette quantité. Car, quand les traits dont on apprécie la coïncidence ne sont pas rigoureusement en ligne droite, on consulte le trait suivant, pour lequel l'écart se manifeste déjà en sens contraire, et l'on prend la moyenne des deux lectures.

Voici maintenant la question inverse: Quelle étendue faut-il donner au vernier d'un cercle pour lire les angles avec un degré donné de précision? L'équation

$$D - d = \frac{1}{n}D$$

résout encore cette question. — Par exemple, un cercle est divisé de 20′ en 20′, et l'on veut que son vernier donne 15″. On aura

$$D - d = 15'' = \frac{1}{n}20'$$

d'où

$$n = \frac{20'}{15''} = \frac{1200}{15} = 80.$$

Il faudrait donc que l'arc du Vernier eût 80 divisions comprenant 79 divisions du Limbe, c.à.d. un arc de 26° 20'.

Cet arc est assurément trop étendu ; mais il est facile de le réduire de moitié en doublant le nombre de divisions du Limbe, lesquelles vaudront alors 10' et non 20'.

Toutefois, il y a des Limites qu'on ne saurait dépasser dans la pratique. ainsi, d'un côté, on ne peut multiplier indéfiniment les divisions d'un Limbe, ni de l'autre augmenter trop l'étendue du Vernier. Dans ce dernier cas, on arriverait bientôt à ce Résultat que dans une même Région du vernier, plusieurs traits successifs paraîtraient en coïncidence avec ceux du Limbe. – Par exemple, donnons au cercle précédent 2 décim. de Rayon ; l'arc de 0 1'' serait de $\frac{0^m,2}{206265}$, ou de $0^{mm},001$ environ. Or deux traits du Limbe et du vernier écartés de cette distance paraîtront nécessairement en coïncidence ; il serait impossible de rendre l'écart sensible à l'œil par la construction du Vernier. Mais 15'' donnent $0^{mm},015$ écart appréciable, surtout avec une Loupe. Il est donc raisonnable d'exiger que le vernier d'un cercle de deux décimètres de Rayon donne immédiatement 15'', et que l'observateur ne commette guères d'erreur plus forte que la moitié de cette quantité.

Excentricité des Verniers.

Tout Vernier tourne autour d'un axe que l'artiste constructeur s'est efforcé de centrer exactement sur le Limbe du cercle divisé. Presque tous les Instruments présentent une petite imperfection à cet égard, et sont affectés d'une erreur d'excentricité plus ou moins forte, dont l'influence p, sur les mesures angulaires, sera (d'après la formule de la p. 271) représentée par la formule

$$p = \frac{\varepsilon}{d} \sin(u-\alpha) + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{d^2} \sin 2(u-\alpha) + \dots$$

u étant la lecture du cercle faite à l'aide du Vernier, ε la distance de l'axe du Vernier au centre du Cercle, d le rayon du cercle, α la division à laquelle aboutit le Rayon du cercle qui passe par le centre de Rotation du Vernier. Cette quantité variable p doit être ajoutée à toutes les Lectures faites sur le Limbe pour avoir celles qu'on obtiendrait s'il n'y avait point d'excentricité. ajoutons que, dans tous les Instruments bien construits, cette correction est assez petite pour pouvoir être Réduite à son 1er terme

$$\frac{\varepsilon}{d} \sin(u-\alpha)$$

D'abord, il est facile de voir qu'avec un cercle entier, on peut éliminer cet effet d'excentricité du Vernier. Il suffit de mesurer le même angle sur deux Régions quelconques, mais diamétralement opposées, du Limbe (1). Dans l'une, l'angle mesuré sur le Limbe sera trop grand, dans l'autre, il sera trop petit de la même quantité. – Mais, pour

---

(1) Cette Ressource suppose que l'axe de Rotation ne Ballotte pas, sans quoi l'erreur d'excentricité serait variable, et ne pourrait être entièrement éliminée que par l'emploi de Verniers Equidistants. Pour parer autant que possible à ce défaut, l'artiste donne à l'axe une forme un peu conique, ainsi qu'à la douille où il tourne, et il maintient l'axe en contact permanent avec la douille à l'aide d'une sorte de ressort placé au bout de l'axe. Malgré ces précautions, le centre de Rotation ne reste pas absolument fixe, car il faut toujours laisser un peu de Jeu, adouci par une couche d'huile. aussi tout instrument muni d'un seul vernier (Quart de cercle, sextant, octant, Graphomètre) est-il essentiellement défectueux.

les Sextants, cette double mesure est impossible, et comme c'est là l'erreur principale du Sextant, il importe de la déterminer et d'en tenir compte.

Pour cela, on mesure à l'aide du Sextant deux angles exactement connus, soit parce qu'ils font partie d'un triangle dont les côtés ont été chaînés, soit parce qu'on aura déterminé ces angles A et B avec un instrument exempt de toute erreur d'excentricité.

Soient donc u, u', u'' les lectures faites sur le Sextant, en sorte que $u'-u$ et $u''-u$ seront les valeurs erronées que l'instrument assigne aux angles A et B. Les vrais angles seraient

$$u' + \frac{\varepsilon}{d}\sin(u'-\alpha) - \left\{ u + \frac{\varepsilon}{d}\sin(u-\alpha) \right\}$$

$$u'' + \frac{\varepsilon}{d}\sin(u''-\alpha) - \left\{ u + \frac{\varepsilon}{d}\sin(u-\alpha) \right\}$$

En égalant ces deux expressions à A et B, on aura deux équations entre les deux inconnues $\frac{\varepsilon}{d}$ et α. — Il sera facile de construire une table des valeurs de la fonction dès lors connue $\frac{\varepsilon}{d}\sin(u-\alpha)$ pour toutes les valeurs de l'argument u, et d'y prendre à vue les corrections qu'il faut ajouter aux lectures u de l'instrument.

Pour simplifier, je n'ai pas tenu compte d'une particularité du Sextant, à savoir de ce que les angles mesurés sur le limbe ne valent en réalité que la moitié de leur rotation représentée. Il sera facile d'introduire cette circonstance dans le calcul.

Les cercles entiers sont bien préférables, sous tous les rapports, aux portions de cercles telles que les Octants, Sextants, Quarts de cercle. Leur avantage est évident en ce qui regarde l'excentricité, car on peut leur donner deux Verniers opposés, et faire disparaître complètement l'erreur d'excentricité, quand bien même elle serait variable.

Il est évident en effet que l'on mesure ainsi le même angle dans deux régions opposées du cercle à la fois, et que la moyenne de leurs lectures est exempte de cette erreur. Nous allons démontrer cette propriété en général, pour n Verniers équidistants.

Soit u la lecture faite au premier Vernier ; s'il n'y avait point d'excentricité, ni d'erreur accidentelle de lecture, la lecture faite au deuxième serait $u + \frac{2\pi}{n}$, au troisième, elle serait $u + 2.\frac{2\pi}{n}$ .... J'appelle $u_1 + \frac{2\pi}{n}$, $u_2 + 2.\frac{2\pi}{n}$ ... celles qui sont faites réellement. Désignons par e_1 e_2 e_3 ... les erreurs accidentelles de lecture commises à chaque Vernier, et par $\frac{\varepsilon}{d}\sin(u-\alpha)$ l'effet actuel de l'excentricité. On aura, pour les n lectures corrigées de ces erreurs :

1er. Vernier.	u	$\cdots + \frac{\varepsilon}{d}\sin(u-\alpha)$	$\pm e_1$	
2e	"	$u_1 + \frac{2\pi}{n}$	$+ \frac{\varepsilon}{d}\sin\left(u-\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)$	$\pm e_2$
3e	"	$u_2 + 2.\frac{2\pi}{n}$	$+ \frac{\varepsilon}{d}\sin\left(u-\alpha+2\frac{2\pi}{n}\right)$	$\pm e_3$
⋮				
ne	"	$u_{n-1} + (n-1)\frac{2\pi}{n}$	$+ \frac{\varepsilon}{d}\sin\left(u-\alpha+[n-1]\frac{2\pi}{n}\right)$	$\pm e_n$

En mettant u pour u_1 sous le signe Sin. l'erreur est insensible.

dont la moyenne sera

$$\frac{1}{n}\Sigma u + \frac{1}{n}\sum_{x=0}^{x=n-1} x\frac{2\pi}{n} + \frac{1}{n}\frac{\varepsilon}{d}\sum_{x=0}^{x=n-1}\sin\left(u-\alpha+x\frac{2\pi}{n}\right) + \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{x=n} \pm e_x$$

Le second terme est la somme d'une progression arithmétique, et il se réduit à

$(n-1)\frac{\pi}{n}$ dont on n'a pas besoin de tenir compte, parce qu'on néglige ordinairement de lire les degrés à chaque vernier, sauf au 1er, où l'on fait la lecture complète. Quant au 3e terme, il est toujours nul, quel que soit n, à moins pourtant que n ne soit égal à 1 (cas d'un seul vernier). Donc, la correction qu'il faut appliquer à la moyenne de n verniers équidistants, afin de tenir compte de l'erreur actuelle d'excentricité, est nulle.

Le quatrième terme nous montre un second avantage dû à l'emploi de plusieurs verniers. Les erreurs accidentelles de lecture sont tantôt positives, et tantôt négatives, au hasard, comme l'indique leur nom. Elles se détruisent donc en partie dans la moyenne, en sorte que l'on a, suivant toute probabilité

$$\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{x=n} \pm e_x < e$$

e étant l'erreur moyenne qu'on peut commettre dans la lecture d'un vernier. L'expérience et la théorie des probabilités s'accordent d'ailleurs à montrer que si $\pm e$ est l'erreur à craindre sur la lecture d'un vernier isolé, l'erreur à craindre sur la moyenne des lectures de n verniers se trouve réduite à $\pm\frac{e}{\sqrt{n}}$.

Ainsi, par rapport aux erreurs accidentelles de lecture, quatre verniers donnent deux fois plus de précision qu'un seul.

Examen et vérification des verniers dans les cercles munis de deux verniers opposés. Deux défauts peuvent empêcher que les lectures faites à ces deux verniers ne soient identiques. Comment on détermine chacun d'eux isolément.

Au lieu de verniers, on se sert aussi de microscopes, portés par l'alidade, pour subdiviser les dernières divisions du limbe. Ces microscopes, d'un pouvoir amplifiant assez considérable, sont armés de réticules et de vis micrométriques. On ne les emploie guère que pour les grands cercles des observatoires fixes. Cependant, on les a appliqués depuis quelques années en Allemagne, avec succès aux instruments usités en Géodésie. Il suffit de dire ici que la vis micrométrique fait mouvoir un des fils du réticule, et sert à l'amener en coïncidence avec l'image du trait du limbe le plus voisin de l'axe optique du microscope ; on mesure ainsi, avec autant de facilité que d'exactitude, l'espace angulaire compris entre le zéro du vernier et le trait voisin sur le limbe. Il convient d'ajouter que les théories suivantes sur l'emploi de plusieurs verniers équidistants sont d'une application plus rigoureuse quand il s'agit de microscopes équidistants.

Cercles divisés.

L'erreur d'un trait de la division d'un limbe peut être de deux sortes : ou bien elle est accidentelle, et alors cette erreur due au hasard, ou du moins à l'influence tout-à-fait passagère de mille petites causes perturbatrices qui agissent momentanément sur la machine à diviser, cette erreur ne se répétera plus dans les traits suivants ; ou bien elle est systématique, comme l'erreur d'excentricité, et elle affectera les traits suivants, d'après une certaine loi. L'erreur accidentelle de division peut être confondue avec l'erreur accidentelle de lecture, quand le vernier vient à tomber sur ce trait, et elle n'aura pas d'autre influence : cette influence se trouve atténuée proportionnellement.

à la racine carrée du nombre des verniers, mais jamais détruits. — Il en est tout autrement des erreurs systématiques. Celles-ci peuvent disparaître entièrement par l'emploi d'un nombre suffisant de verniers équidistants, et cette propriété des verniers, base essentielle de la précision de nos mesures angulaires, n'est pas une des moins curieuses conséquences de quelques théorèmes de trigonométrie analytique que nous avons occasion de rappeler.

D'abord, par définition, les erreurs systématiques affectent les divisions suivant une certaine loi qui dépend évidemment de la situation de chaque trait sur le limbe, et lorsqu'on revient au même trait après avoir parcouru la circonférence entière, on retrouve évidemment la même erreur. Leur loi sera donc exprimée par des fonctions périodiques plus ou moins complexes, dont les variables indépendantes ou les arguments ne seront autre chose que les arcs compris entre le trait considéré et certains autres traits pris pour origine. — C'est ainsi que les astronomes procèdent quand ils ajoutent aux expressions du mouvement circulaire des planètes certains termes périodiques destinés à représenter soit les inégalités elliptiques, soit les perturbations produites par l'action des planètes.

Quelles que soient, en effet, les erreurs systématiques des divisions, on pourra toujours représenter l'erreur e d'un trait quelconque u par un certain nombre de termes de la série suivante, laquelle procède suivant les sinus et les cosinus des multiples de cet arc u, ou, ce qui revient au même, suivant les seuls sinus des multiples d'un arc compté à partir d'origines successivement différentes. Cela revient à écrire

$$e = A_1 \sin(u-\alpha_1) + A_2 \sin 2(u-\alpha_2) + A_3 \sin 3(u-\alpha_3) + \dots + A_k \sin k(u-\alpha_k) + \dots$$

La lecture correspondante à chaque vernier doit donc recevoir une correction de même forme, et, à la moyenne de n verniers, il faudra ajouter la série suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n}\sum_{x=0}^{x=n-1} A_1 \sin\left\{(u-\alpha_1) + x\frac{360^\circ}{n}\right\} \\ + & \frac{1}{n}\sum_{x=0}^{x=n-1} A_2 \sin\left\{2(u-\alpha_2) + x\frac{2.360^\circ}{n}\right\} \\ + & \frac{1}{n}\sum_{x=0}^{x=n-1} A_3 \sin\left\{3(u-\alpha_3) + x\frac{3.360^\circ}{n}\right\} \qquad (1) \\ + & \dots\dots\dots \\ + & \frac{1}{n}\sum_{x=0}^{x=n-1} A_k \sin\left\{k(u-\alpha_k) + x\frac{k.360^\circ}{n}\right\} \\ + & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Pour discuter cette expression un peu complexe, en apparence, prenons le terme général. En développant le sinus de la somme des deux arcs, on trouve

$$\frac{1}{n} A_k \sin k(u-\alpha_k) \sum_{x=0}^{x=n-1} \cos. x\frac{k.360^\circ}{n} + \frac{1}{n} A_k \cos k(u-\alpha_k) \sum_{x=0}^{x=n-1} \sin. x\frac{k.360^\circ}{n} \qquad (2)$$

Or le second terme est toujours nul, et le premier l'est aussi lorsque k n'est pas un multiple de n.

Donc, dans la correction précédente (1) qu'on doit appliquer à la moyenne des lectures de n verniers, tous les termes de la forme

$$\frac{1}{n}\sum_{x=0}^{x=n-1} A_k \sin\left\{k(u-\alpha_k) + x\,\frac{K.360^\circ}{n}\right\}$$

dans lesquels K ne sera pas divisible par n, se trouveront annulés par l'emploi de n verniers équidistants.

Mais, en revenant au terme général dont (2) reproduit l'expression développée, on voit que, si K est multiple de n,

$$\sum_{x=0}^{x=n-1} \cos x\,\frac{K.360^\circ}{n}$$

se réduit à n. ainsi le terme général n'est pas nul dans ce cas. Il devient

$$\frac{1}{n} A_k \sin.k(u-\alpha_k) \times n = A_k \sin.k(u-\alpha_k)$$

qui est le terme général de la série dont nous nous servons pour représenter l'erreur de division du trait u. – Donc, dans la correction (1) qu'il faut appliquer à la moyenne des lectures de n verniers équidistants, tous les termes dont le facteur 1, 2, 3, .. K, ... sera divisible par le nombre n des verniers, subsisteront sans altération, tandis que les autres se trouveront éliminés.

Par exemple, s'il y a quatre verniers, comme dans les grand théodolites de Gambey, les termes du 1er, 2e, 3e, 5e, ... ordre, c. à d.

$$A_1 \sin(u-\alpha_1) + A_2 \sin 2(u-\alpha_2) + A_3 \sin 3(u-\alpha_3) + A_5 \sin 5(u-\alpha_5) \;\ldots$$

disparaissent de la ~~lecture~~ moyenne des lectures faites aux quatre verniers, mais non les termes

$$A_4 \sin 4(u-\alpha_4) + A_8 \sin 8(u-\alpha_8) \ldots$$

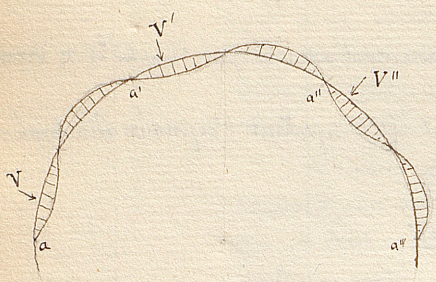
ceux-là ne sont point éliminés dans cette moyenne, et l'altèrent plus ou moins profondément, en raison de la grandeur des coefficients A_4, A_8, ...

Avec deux verniers opposés seulement, tous les termes d'ordre impair disparaissent, mais tous les termes d'ordre pair subsistent.

C'est un fait d'expérience que, dans un cercle bien construit et bien divisé, où les erreurs de division procèdent non par des sauts brusques, mais d'une manière continue, les premiers termes de la série précédente ont seuls une grandeur sensible, et que les termes d'ordres très-élevés sont négligeables. Par conséquent, un nombre assez restreint de verniers suffira pour éliminer les erreurs de division. C'est ainsi que les astronomes mettent six verniers (ou six microscopes équidistants) à leurs cercles, afin de n'avoir pas à s'occuper des termes des cinq premiers ordres. Celui du sixième, qui subsiste alors, est presque toujours très-petit, et même négligeable, si l'instrument est bien construit.

Pour se faire une idée nette du jeu de ces termes par lesquels on représente analytiquement les erreurs de division, il est bon de les soumettre à une sorte d'interprétation géométrique. – Considérons, par ex. le terme $A_6 \sin 6(u-\alpha_6)$. Sa période est le sixième de la circonférence, c. à d. qu'il passe par toutes les phases du sinus quand l'arc $u-\alpha_6$ varie seulement de 60°.

Imaginons qu'à chaque trait de la division du cercle, on élève une petite ordonnée normale à la circonférence, pour représenter en grandeur et en sens, positif ou négatif, l'erreur de ce trait. La courbe d'erreur sera une ligne ondulée analogue à une sinusoïde (voir la p. suivante) qui se reproduira six fois autour du cercle, de a en a', puis de a' en a'', de a'' en a''', ... Quand un vernier tombera en V, il faudra ajouter à la lecture qu'on y



fait du trait correspondant, la petite ordonnée de la courbe d'erreur pour corriger cette lecture. — Mais s'il y a plusieurs Verniers, on devra distinguer deux cas ; leur nombre n est ou n'est pas un diviseur du nombre total de tours périodiques de l'erreur. Dans le 1er cas, représenté sur la figure, chaque vernier v, v', v'' .. tombera sur une ordonnée de même grandeur et de même signe ; leur moyenne sera donc affectée de l'erreur représentée par cette ordonnée. — Dans le second cas, à chaque Vernier, la grandeur et le signe de l'ordonnée varieront, et par une propriété des sinus des arcs qui croissent ainsi en progression arithmétique, les ordonnées négatives compenseront exactement les positives, et leur somme sera zéro. — Ainsi la moyenne des lectures faites à 2, 5 ou 7 .. verniers équidistants se trouvera entièrement exempte de cette erreur du 6e ordre (de la figure). Cette erreur affecterait au contraire, sans aucune réduction, la moyenne de 2, de 3 ou de 6 verniers, tout aussi bien que la lecture d'un seul (1)

La représentation des erreurs d'un cercle divisé, par les termes de la série précédente, n'est pas une conception purement analytique. Il est facile d'indiquer certaines erreurs qui procèdent en effet comme les termes du 1er ordre, du 2e ordre .. etc. — Supposons par exemple, que le limbe de ce cercle ait été mal centré par l'artiste sur la plateforme de la machine à diviser ; il en résultera aussitôt, dans les divisions ainsi obtenues, une erreur analogue à celle que l'excentricité e des Verniers produit dans les lectures, erreur dont voici la loi :

$$\frac{e}{r}\sin(u-\alpha)+\frac{1}{2}\frac{e^2}{r^2}\sin 2(u-\alpha)+\frac{1}{3}\frac{e^3}{r^3}\sin 3(u-\alpha)+\ldots$$

Supposons encore que l'axe autour duquel tournent les alidades et les Verniers d'un cercle fasse un angle ω avec le plan de ce cercle. Il en résultera une erreur analogue à la réduction à l'Ecliptique, dont nous avons donné la formule pl. 272, car les angles décrits par l'axe optique de la lunette seront mesurés par des Verniers qui se meuvent dans un autre plan. Il faudra donc ajouter alors, à la lecture de chaque Vernier, une correction de la forme

$$-\mathrm{Tg}^2\tfrac{1}{2}\omega\sin 2(u-\alpha)+\tfrac{1}{2}\mathrm{Tg}^4\tfrac{1}{2}\omega\sin 4(u-\alpha)-\ldots$$

On voit que ces corrections diverses sont précisément comprises dans la formule générale

$$A_1\sin(u-\alpha_1)+A_2\sin 2(u-\alpha_2)+A_3\sin 3(u-\alpha_3)+\ldots$$

Vérification des divisions d'un Cercle.

Lorsqu'il s'agit d'apprécier le mérite d'un Instrument, et de vérifier l'exactitude

---

(1) On peut cependant, avec deux Verniers, mesurer des angles de 180°, avec trois verniers, des angles de 120°, et avec 6 des angles de 60° etc... sans que ces mesures soient en rien affectées par les erreurs de division.

de ses divisions, il est nécessaire de déterminer les erreurs absolues d'un certain nombre de traits, afin d'en conclure ensuite, par le calcul, les erreurs systématiques de tous les autres. — Le procédé qu'il faut suivre pour cela offre le double avantage de donner une idée assez nette des meilleurs moyens que les artistes aient imaginés pour diviser leurs cercles, et de faire connaître une méthode dont nous aurons à parler plus tard, celle de la Répétition.

Le procédé consiste à mesurer successivement, avec toutes les portions du limbe, un même angle qui soit à très-peu-près une partie aliquote de la circonférence, 30° par ex. Placez le vernier sur 0°, et dirigez la lunette (qui entraîne alors le vernier fixé au limbe et le limbe lui-même) sur un objet bien défini, tel qu'une mire ou un collimateur; puis fixez le limbe, rendez la lunette et l'alidade libres, amenez le vernier à peu-près sur 30°, et faites placer alors, dans la direction actuelle de l'axe optique, un jalon ou un nouveau collimateur. L'angle véritable des deux objets sera $30° + x$, x étant une très-petite quantité inconnue. À la vérité, le cercle donnera une mesure de cet angle, mais une mesure affectée de l'erreur également inconnue du trait de 30°. Il s'agit donc d'abord de déterminer cet angle $30° + x$ indépendamment des erreurs de division, puis, en comparant sa valeur exacte à la valeur fournie par le cercle, on obtiendra aussitôt l'erreur du trait de 30°. — Pour cela, recommencez la mesure du même angle en prenant cette fois pour point de départ la position qu'avait le vernier à la fin de l'opération précédente: vous arriverez ainsi au trait de 60°. Une 3e mesure amènera le trait de 90°, et après les douze opérations de ce genre, où l'angle $30° + x$ aura été ajouté 11 fois à lui-même, le vernier sera revenu à très-peu près au trait initial de la division, puisque x est supposé très-petit. Admettons que les lectures faites à chaque mesure soient:

1re	$30° + a_1$
2e	$30° + a_2$
3e	$30° + a_3$
......	
12e	$30° + a_{12}$

À la 12e opération, on a évidemment 12 fois l'angle cherché, et cela, indépendamment de toute erreur de division, car le trait 0°, par lequel on a commencé, est le même que le trait 360°, par lequel on finit (1). — De la relation:

(1) Cela n'est rigoureux que si l'on se sert de microscopes au lieu de verniers.

$$360° + a_{12} - (0° + a_1) = 12\,(30° + x)$$

on tirera la valeur de l'inconnue $x = \frac{1}{12}(a_{12} - a_1)$. — En nommant ε_1, ε_2, ε_3 ... ε_{11} les erreurs des 11 traits, ou les petites corrections qu'il faut ajouter aux lectures correspondantes à ces 11 traits, on obtiendra leurs valeurs par les relations

$$30° + a_1 + \varepsilon_1 = 30° + x$$
$$60° + a_2 + \varepsilon_2 = 2\,(30° + x)$$
$$90° - a_3 + \varepsilon_3 = 3\,(30° + x)$$
$$\cdots\cdots$$
$$330° + a_{11} + \varepsilon_{11} = 11\,(30° + x)$$

lesquelles font connaître ε_1 ε_2 ε_3 ... c.à.d. les erreurs relatives au 1er trait 0° ou 360° pour lequel l'erreur est nulle. Enfin, si l'on veut déterminer, à l'aide de ces valeurs, un certain nombre de constantes dans l'expression générale des erreurs,

$$\varepsilon = A_1 \sin(u - \alpha_1) + A_2 \sin 2(u - \alpha_2) + \cdots$$

il suffira d'y substituer, à la place des variables ε et u, leurs valeurs numériques obtenues par les opérations précédentes, et, après avoir développé les $\sin(u - \alpha_1)$, $\sin 2(u - \alpha_2)$...

de former les différences suivantes

$$\varepsilon_1 = x_1 \sin 30^\circ - y_1 \cos 30^\circ + x_2 \sin . 2.30^\circ - y_2 \cos 2.30^\circ + x_3 \sin 3.30^\circ - y_3 \cos 3.30^\circ + \ldots$$

$$\varepsilon_2 = x_1 \sin 60^\circ - y_1 \cos 60^\circ + x_2 \sin 2.60^\circ - y_2 \cos 2.60^\circ + x_3 \sin 3.60^\circ - y_3 \cos 3.60^\circ + \ldots$$

- - - - - - -

$$\varepsilon_{11} = x_1 \sin 330^\circ - y_1 \cos 330^\circ + x_2 \sin 2.330^\circ - y_2 \cos 2.330^\circ + x_3 \sin 3.330^\circ - y_3 \cos 3.330^\circ + \ldots$$

où l'on a posé pour simplifier

$$A_1 \cos \alpha_1 = x_1 \qquad A_1 \sin \alpha_1 = y_1$$

$$A_2 \cos 2\alpha_2 = x_2 \qquad A_2 \sin 2\alpha_2 = y_2$$

$$A_3 \cos 3\alpha_3 = x_3 \qquad A_3 \sin 3\alpha_3 = y_3$$

- - - -   - - - -

On n'a pas tenu compte, dans cette discussion, des erreurs de lecture aux verniers, et des erreurs de pointé sur les deux mires qui déterminent l'angle de 30° + x, parce que l'observateur est maître d'atténuer presque indéfiniment ces erreurs en prenant pour chaque quantité à mesurer la moyenne d'un grand nombre de mesures indépendantes.

Au fond, cette méthode se réduit au procédé très-élémentaire que l'on a toujours employé, pour partager, avec le compas, un cercle donné en un nombre quelconque de parties égales. Presque toujours, l'extrême précision s'obtient avec les moyens les plus simples, combinés scientifiquement.

Mesure des Angles.

Ce n'est que par une discussion détaillée des causes d'erreur que l'on peut espérer de reconnaître les conditions auxquelles il faut satisfaire pour atteindre un degré donné de précision.

Pour mesurer l'angle compris entre deux objets A et B, on commence par fixer solidement, à l'aide d'une pince, le cercle alidade, et par suite la lunette, au cercle divisé; puis on fait tourner ensemble les deux cercles autour de l'axe propre du cercle divisé, jusqu'à ce que l'axe optique de la lunette soit dirigé exactement sur le point A. Dans cette position de l'instrument, on les fixe d'une manière invariable, et on lit les verniers dont la moyenne est u. — Ce 1er. ensemble d'opérations comporte trois erreurs:

1°. L'erreur accidentelle p du pointé; elle est d'environ ± 2" pour les lunettes dont on se sert en Géodésie, et qui grossissent de 20 à 50 fois.

2°. L'erreur accidentelle de lecture des verniers. Si chaque vernier donne immédiatemt. 10", on peut lire les indications à 5" près, et, en supposant 4 verniers dont on prend la moyenne, l'erreur à craindre se trouve réduite à $\pm \frac{5''}{\sqrt{4}} = \pm 2'',5$.

3°. L'erreur de division d. Celle-là est de nature complexe: car elle comprend, comme nous avons vu, l'erreur accidentelle, non régulière, de chaque trait, et son erreur systématique. L'emploi de 4 verniers équidistants éliminera toujours les termes les plus importants de cette dernière, et nous verrons plus loin comment on peut achever de la faire disparaître en combinant convenablement un certain nombre d'observations du même angle. En attendant, nous admettrons que l'erreur de division peut encore aller à 5" dans la moyenne des 4 verniers d'un cercle Géodésique.

La deuxième opération consiste à détacher le cercle alidade ou la lunette qui se trouvait précédemment fixée au cercle divisé, puis à amener l'axe optique dans la direction du second objet B. alors, on serre de nouveau la pince destinée à fixer la lunette au cercle divisé, et l'on achève, si cela est nécessaire, de régulariser le pointé à l'aide d'une vis de rappel à mouvement micrométrique. on lit de nouveau les verniers, dont la moyenne u_1 sera entachée plus ou moins des trois erreurs précédentes, en sorte que la lecture vraie serait

$$u_1 \pm p_1 \pm l_1 \pm d_1$$

L'angle ainsi mesuré sera $u_1 - u$, tandis que la vraie valeur serait

$$u_1 \pm p_1 \pm l_1 \pm d_1 - (u \pm p \pm l \pm d).$$

Lorsqu'il s'agit d'erreurs systématiques dont on connaît la loi ainsi que les constantes numériques qui entrent dans l'expression de cette loi, il est aisé d'en tenir compte par un calcul rigoureux; mais quand il s'agit d'erreurs accidentelles indépendantes les unes des autres, qui se produisent au hasard, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, sans être assujetties à aucune autre condition que de ne pas dépasser une certaine limite assignable, alors il devient impossible d'en corriger les observations. Tout ce que l'on peut faire, c'est d'apprécier, d'une manière plus ou moins probable, l'influence qu'elles exercent sur le résultat définitif. La discussion de ces erreurs est donc du ressort de la théorie des probabilités.

Sans entrer dans cette discussion, on peut se former une idée de cette influence en admettant que, dans une mesure donnée, toutes les erreurs conspirent ensemble au lieu de se détruire mutuellement, au moins en partie, par l'opposition de leurs signes. On trouverait ainsi 19" pour la somme de ces erreurs accidentelles; mais on sent bien que cette accumulation possible d'erreurs n'est pas plus probable que leur complète destruction mutuelle, et nous nous bornerons à estimer à 9" l'erreur définitive que l'on peut craindre, en moyenne, dans la mesure des angles avec les instruments dont nous parlons ici.

Mais ce degré de précision serait bien insuffisant pour les besoins de la Géodésie; dans les grandes triangulations, il est nécessaire d'obtenir les angles à 1" ou même à 0",5 près, et l'on s'assurera aisément qu'on y est parvenu en employant même de petits instruments portatifs. — En effet, quand on a mesuré les trois angles d'un triangle géodésique, il se présente une vérification facile: la somme des 3 angles doit faire 180°, lorsqu'on a retranché de chacun d'eux le tiers de l'excès sphérique. or, dans les dernières triangulations françaises, cette somme ne différait guère de 180° que de 1" à 2" en moyenne. Il faut pour cela que les angles aient été mesurés non pas à 9", ni avec des erreurs possibles de 19", mais à 0",5 près.

Il a donc fallu résoudre ce problème: avec un instrument qui ne donne les angles qu'à 9" près, par une seule mesure, déterminer ces angles avec une précision 10 fois plus grande. Il s'est présenté deux méthodes, celle de la Répétition et celle de la Réitération. (1)

---

(1). On augmente aussi la précision des mesures en augmentant les dimensions des instruments. C'est ce que font les astronomes. au lieu de cercles de 0m,25 de diamètre, ils emploient des cercles de 2m; au lieu de petites lunettes de 0m,3 grossissant 20 ou 30 fois, ils

Méthode de la Réitération.

Elle consiste à recommencer la même mesure un certain nombre de fois, mais en changeant chaque fois, sur le limbe divisé, le point de départ de l'angle mesuré, c.à.d. la première lecture u, afin de ne pas retomber sur les mêmes erreurs de division (1). La moyenne de ces diverses mesures est plus exacte, évidemment, qu'une mesure unique, et l'on admet, soit en vertu de considérations théoriques, soit comme résultat de l'expérience, que la précision de cette moyenne croît, non pas comme le nombre des mesures isolées, mais du moins comme la racine carrée de ce nombre.

L'erreur à craindre, au bout de 10, de 100, de 1000 mesures ainsi faites, se trouverait donc réduite successivement de 9" à 2",8, à 0",9 à 0",28 (2).

Il y a plus, en choisissant pour origine de chaque mesure des points équidistants de la circonférence, on parvient à éliminer complètement les erreurs systématiques de la division que le petit nombre des verniers laisse encore subsister en partie.

Ainsi, dans une série de 10 mesures du même angle faites avec un seul vernier, on prendra successivement pour origine u de l'arc u, –u, les divisions

$$0° \quad 36° \quad 72° \quad \ldots \quad 324°.$$

Dès lors les 9 premiers termes de la série qui représente les erreurs de division se trouveront annulés dans la moyenne des 10 mesures, et il en sera de même de tous les termes dont le chiffre d'ordre n'est pas un multiple de 10.

Si le cercle est muni de deux verniers opposés, on prendra pour origine

$$0° \quad 18° \quad 36° \quad \ldots \quad 162°$$

ou, ce qui revient au même,

$$u, \quad u+18°, \quad u+36°, \quad \ldots \quad u+162°.$$

et l'on éliminera ainsi ~~tous~~ les termes de la série sauf le 20e, le 40e, etc.

Enfin, si le cercle a 4 verniers, la moyenne de 10 mesures dont les points de départ seraient

$$u \quad , u+9°, \quad u+18°, \quad \ldots \quad u+81°$$

ne sera affectée que des erreurs exprimées par les termes du 40e, du 80e.. ordre. Or il faudrait qu'un cercle fût bien mal divisé pour qu'une élimination aussi large restât insuffisante.

---

en ont de 2 ou 3m qui grossissent de 150 à 250 fois; au lieu de deux ou de 4 verniers équidistants, ils en mettent 6 à leurs cercles. – Aussi mesurent-ils les angles, du 1er coup, à quelques dixièmes de seconde près. Mais on comprend que ces grands instruments ne sauraient servir aux opérations géodésiques.

(1) Pour cela, il faut que l'instrument présente une disposition particulière dont il sera question plus loin.

(2) Il ne faudrait pas s'imaginer que cette réduction des erreurs pût être poussée au delà de toute limite. Elle est essentiellement fondée sur l'hypothèse que les seules erreurs des mesures sont des erreurs accidentelles : or il n'en est jamais ainsi en toute rigueur dans la réalité. Il existe probablement toujours de petites erreurs systématiques dues à des causes inconnues, mais constantes, et ces erreurs-là ne sont nullement atténuées dans la proportion susdite, par la réitération des mesures.

Le premier cas, celui d'un seul Vernier, a été cité pour mémoire : il doit être exclu, car cette disposition donne prise à un défaut grave, à savoir, la variabilité de l'erreur d'excentricité. Cette variabilité a bien dans tous les cercles ; mais son influence disparaît quand on emploie plusieurs verniers équidistants, si l'on a soin de lire ces verniers dans la position même où le pointé a été fait.

Telle est la méthode de la Réitération, la seule que les astronomes emploient, la seule aussi que l'on doive employer en Géodésie, du moins pour la mesure des angles verticaux (nous verrons bientôt quelle distinction profonde il faut établir, dans la pratique, entre la mesure des angles verticaux et celle des angles horizontaux).

Méthode de la Répétition.

C'est à cette méthode qu'on a eu recours tout d'abord. L'idée première en est due à un astronome allemand, Tobie Mayer ; mais elle a été singulièrement développée par notre célèbre Borda, qui en a fait la base de tous les instruments Géodésiques. Voici cette idée. Dans la mesure d'un angle ou d'un arc, on ne commet d'erreur qu'aux deux bouts de cet arc, quelle qu'en soit la grandeur, en sorte que s'il était possible de l'ajouter un grand nombre de fois à lui-même, la mesure de l'angle total ne serait ni plus ni moins exacte que celle de l'arc simple ; on l'obtiendrait, par exemple, à 9" près, tout comme celui-ci. Mais comme, pour avoir l'arc simple, il faudrait diviser l'arc total par le nombre 10, 100, 1000.. de répétitions, l'erreur commise se trouverait aussi atténuée par cette division, et réduite à 0",9, à 0",09, à 0",009, .. etc.

Cette méthode, on le voit, atténuerait les erreurs bien plus rapidement que la précédente, c.a.d. en raison du nombre des observations, tandis qu'en réitérant simplement les mesures, l'erreur décroîtrait en raison de la racine carrée de ce nombre.

Voici maintenant la combinaison instrumentale par laquelle Borda a su rendre cette méthode praticable ; il est inutile de prévenir que la méthode précédemment décrite suppose une semblable construction.

Pour qu'un cercle soit répétiteur, il faut qu'on puisse amener le zéro du limbe dans une direction quelconque sans déplacer le pied de l'instrument ; par conséquent, le cercle divisé doit tourner autour d'un axe propre, tout comme le cercle alidade (cercle des verniers) auquel est fixée la lunette. Un cercle répétiteur a donc toujours deux axes coniques emboîtés l'un dans l'autre, axes qui peuvent tourner ensemble ou séparément dans une douille ou sur des coussinets convenables. De plus, le cercle divisé peut être fixé au pied de l'instrument à l'aide d'une pince munie d'une vis de rappel, et le cercle vernier qui porte la lunette peut être fixé au cercle divisé par une seconde pince également munie d'une vis de rappel. Quand ces deux pinces sont serrées, toutes les pièces de l'instrument sont fixes, et solidaires, avec le pied immobile.

Pour mesurer l'angle compris entre deux objets A, B, placés dans le plan commun des deux cercles, on fixe le cercle vernier au cercle limbe, après avoir placé le zéro du 1er vernier au trait de la division que l'on a choisi comme origine, puis on fait tourner l'ensemble des deux cercles jusqu'à ce que la lunette

soit pointée sur l'objet A (je suppose que les divisions du cercle se comptent dans le sens AB). alors, on fixe le cercle divisé au pied immobile de l'instrument, à l'aide de sa pince particulière, et on lit les verniers, dont nous désignerons la moyenne par u. Cela fait, on desserre la pince du cercle vernier, de manière à rendre la lunette libre, et l'on fait tourner le cercle vernier jusqu'à ce que la lunette qu'il porte soit dirigée sur l'objet B. alors, on fixe par sa pince propre le cercle vernier et la lunette au cercle divisé, qui est resté immobile avec le pied pendant ce mouvement, et l'on achève, s'il y a lieu, de perfectionner l'exactitude du pointé en se servant de la vis de rappel de la pince des verniers. Il est évident que l'axe optique a parcouru ainsi l'angle AB, en sorte que si on lisait les verniers dans la 2e. position, leur moyenne étant u_1, l'angle $\widehat{AB}$ aurait pour mesure $u_1 - u$.

Mais il s'agit d'ajouter plusieurs fois à lui-même cet angle AB, afin de mesurer sur le limbe un multiple de cet angle. Pour cela il suffit évidemment de recommencer l'opération précédente, c. à d. la mesure de l'angle AB, en prenant cette fois pour origine l'extrémité u_1 de l'arc parcouru précédemment sur le limbe. On laissera donc les verniers en place, sans même en faire la lecture; on détachera la pince qui fixe le cercle divisé au pied; puis on ramènera la lunette sur le premier objet A, sans que les verniers puissent changer de place sur le limbe divisé avec lequel ils font corps, grâce à leur pince particulière. Enfin, on fixera de nouveau le cercle limbe au pied de l'instrument, et l'on rectifiera, s'il y a lieu, le pointé à l'aide de la vis de rappel de la pince qu'on vient de serrer.

Tout se retrouve placé comme au début de l'opération précédente, si ce n'est que les verniers marquent u_1, et non u. On mesurera de nouveau l'angle AB en rendant libre le cercle des verniers et en amenant ~~la~~ lunette sur l'objet B par un mouvement de rotation qui s'effectuera autour de l'axe du cercle vernier, le cercle limbe restant fixé au pied de l'instrument. Dans cette dernière position de la lunette, les verniers marquant u_2, l'arc partiel $u_2 - u_1 = u_1 - u$ est la mesure de l'angle AB, et l'arc total $u_2 - u$ en est le double. — De même on obtiendra l'arc triple, décuple, centuple, etc. par une série d'opérations dans lesquelles chaque mesure commence là où la précédente a fini. après n répétitions, qu'on a soin de compter, on lira les verniers dont la moyenne sera u_n; l'arc cherché aura pour valeur

$$\frac{1}{n}\,(u_n - u)$$

et si e est l'erreur qui affecte l'arc multiple $u_n - u$, $\frac{e}{n}$ sera l'erreur de l'arc simple qu'on en aura conclu. (1).

Avant de discuter et de décomposer cette erreur e de l'arc multiple u_n, il est nécessaire de parler ici de la lunette de sûreté, qui est fixée au dessous au pied du théodolite, au dessous du limbe horizontal.

Dans les longues séries, relatives à la Grande Triangulation Française, où l'on a été jusqu'à répéter le même angle plusieurs centaines et même plusieurs milliers

---

(1). Il est facile de se faire des règles pratiques pour éviter les fausses manœuvres, les mouvements à contre-sens qu'on ~~pou~~rait craindre de commettre dans une longue série d'opérations identiques. Supposons par ex. que les divisions procèdent dans le sens des aiguilles d'une montre: on commencera par pointer sur l'objet de gauche, et, pour aller de celui-là à l'objet de droite, il faudra détacher le cercle vernier, tandis que pour aller de l'objet de droite à l'objet de gauche, c'est le cercle divisé qu'il faudra détacher, etc.

de fois (1), il est indispensable de s'assurer que le pied ou le support de l'instrument ne s'est pas déplacé, ou du moins, d'avoir un moyen de tenir compte de ces déplacements.

Pour cela, on dirige l'axe optique de la Lunette de sûreté sur un objet fixe, offrant un bon point de mire, puis, à chacune des opérations précédemment décrites, on consulte cette Lunette. Comme elle est invariablement liée au pied de l'instrument, elle doit en suivre tous les déplacements angulaires : si donc elle s'est écartée de la mire, il faudra l'y ramener en faisant tourner l'instrument, ou du moins le cercle divisé, et avec lui, le cercle vernier et la Lunette. Il y a pour cela une vis de rappel spéciale. Puis, comme cette petite correction aura nécessairement dérangé le pointé de la Lunette supérieure, on le rectifiera en se servant de la vis de rappel qui avait servi à effectuer ce pointé.

Cette Lunette de sûreté joue, dans la mesure des angles horizontaux dont nous nous occupons plus spécialement ici, un rôle analogue à celui du niveau dans la mesure des angles verticaux, car le niveau accuse les petits dérangements de l'axe du théodolite dans le plan vertical où l'on observe, de même que la Lunette de sûreté indique les petits déplacements angulaires dans le sens horizontal. (2).

Discutons maintenant l'erreur de l'arc multiple $u_n - u$. D'abord, il est évident que les erreurs de lecture et de division ne portant que sur les extrémités de cet arc, quand on le divisera par n pour avoir l'arc simple, elles se trouveront aussi divisées par n. Mais là se bornera l'efficacité de la méthode de la Répétition, car il s'en faut que l'erreur de pointé se trouve éliminée dans la même proportion. En effet, pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que cette erreur de pointé ne portât que sur les extrémités de l'arc multiple $u_n - u$, tandis qu'elle se reproduit au contraire à chaque opération partielle. Le résultat sera donc ici le même que pour la méthode de réitération, c. à d. cette erreur se trouvera simplement atténuée en raison de la racine carrée du nombre des mesures.

En désignant ces 3 erreurs par les lettres p, l, d, on aura donc pour les erreurs de l'arc cherché

$$\frac{p}{\sqrt{n}},\quad \frac{l}{n},\quad \frac{d}{n} \qquad \text{par la méthode de la Répétition}$$

et

$$\frac{p}{\sqrt{n}},\quad \frac{l}{\sqrt{n}},\quad \frac{d'}{\sqrt{n}} \qquad \text{par celle de la Réitération} \quad (d' < d)$$

---

(1). Ces séries duraient plusieurs jours ; pendant la nuit, on laissait l'instrument en place, les vis serrées, afin de reprendre le lendemain matin la série des répétitions au point même où elle avait été terminée la veille. Tout en donnant de tels soins et un tel amour de la précision, il est bon d'avertir que la précision s'obtient plutôt par une étude approfondie des méthodes d'observation, des instruments et de leurs erreurs, que par l'accumulation exagérée de mesures. Pour que la moyenne d'un grand nombre de mesures conduise plus près de la vérité qu'une mesure unique, il faut, avant tout, que chaque opération isolée soit elle-même exempte d'erreur constante ou systématique, et ne présente que des erreurs accidentelles. La Puissance des Moyennes ne porte que sur ces dernières, et non sur les erreurs qui suivent une loi. Pour celles-là, il n'y a qu'un moyen de s'en débarrasser, c'est de découvrir leur loi ; quand cette loi est connue, on élimine l'erreur, soit par le calcul, soit par la méthode même de l'observation.

(2). On pourrait même éviter toute correction manuelle en adaptant une vis micrométrique au réticule de la Lunette de sûreté : à l'aide de cette vis, on mesurerait, à chaque pointé de la Lunette supérieure, les petits déplacements horizontaux de l'appareil, et l'on corrigerait l'arc parcouru sur le limbe $u_n - u$ de la moyenne de tous ces petits déplacements.

C'est ainsi, du reste, que l'on opère avec le niveau.

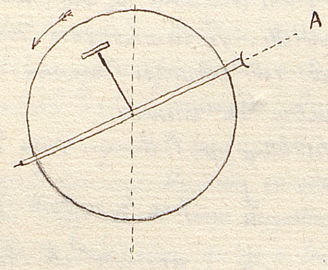
ce qui diminue l'avantage de la première, surtout quand on considère que l'on comprend dans celle-ci les erreurs accidentelles des traits extrêmes, et leurs erreurs systématiques, tandis que ces dernières sont éliminées entièrement dans la seconde méthode.

Mesure des angles verticaux.

Il faut d'abord examiner le sens des divisions du cercle vertical. Ordinairement, il est direct, c.à.d. opposé à celui des aiguilles d'une montre. Par conséquent, lorsque le cercle est à gauche de l'observateur (celui-ci faisant face à l'objet dont il s'agit de mesurer la distance zénithale) les arcs croissent en allant du zénith à l'objet. C'est dans cette position que la mesure devra être finalement exécutée.

Mais pour la commencer, il faut placer l'instrument dans la position symétrique. Il faut donc débuter par Cercle à Droite, pour finir par Cercle à Gauche. Ce serait l'inverse si les divisions étaient rétrogrades.

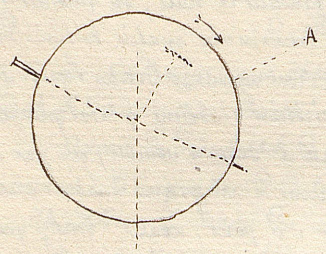
1°. Cercle à Droite.



1°. Cercle à Droite.

On amène le 1er vernier sur la division u que l'on veut prendre pour origine ; on fixe le cercle vernier, et par conséquent la lunette, au cercle extérieur divisé, et l'on dirige la lunette sur l'objet A, en faisant tourner l'ensemble des deux cercles. On fixera alors le cercle divisé avec sa pince particulière, et l'on achèvera le pointé à l'aide de la vis de rappel de cette pince. Dans cette position, on lit les verniers, dont nous désignerons par u la moyenne.

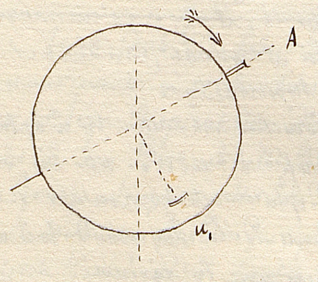
2°. Cercle à Gauche.



2°. Cercle à Gauche.

On fait ensuite tourner l'instrument de 180° autour de son axe vertical, de manière à amener le cercle à gauche. La lunette prend alors une position symétrique à la 1re, de l'autre côté de la verticale.

3°. Cercle à Gauche.



3°. Cercle à Gauche.

On desserre la pince qui relie le cercle vernier de la lunette au limbe divisé, et, sans toucher à ce dernier qui doit rester immobile, on fait tourner la lunette jusqu'à ce qu'elle soit dirigée de nouveau sur A. On lit alors les verniers dont nous désignerons la moyenne par u_1, et la distance angulaire du point A au pôle de l'instrument est

$$Z = \frac{1}{2}(u_1 - u)$$

Le lieu du pôle de l'instrument sur le cercle divisé

est évidemment

$$\tfrac{1}{2}(u_1+u).$$

celui est le Zénith, et $\tfrac{1}{2}(u_1-u)$ est la Distance zénithale de A si l'axe est vertical.

Il arrive rarement que l'axe coïncide tout-à-fait avec la verticale; il se peut même qu'il s'en écarte progressivement pendant ces manœuvres. Mais le niveau, (faisant ici fonctions de la Lunette de sûreté dont il a déjà été question) accusera ces déplacements, et donnera le moyen d'en corriger les observations.

Soient : m la moyenne des lectures faites aux extrémités de la bulle, le cercle étant à droite, et m_1 la moyenne analogue lorsque le cercle est à Gauche. L'angle Z sera alors

$$\tfrac{1}{2}(u_1-u) + \tfrac{1}{2}(m_1-m)$$

Cette règle si simple suppose que la graduation du niveau procède en sens inverse de celle du Limbe; car, si l'axe s'incline vers l'objet de manière à donner sur le Limbe une distance zénithale trop petite, la correction $+\tfrac{1}{2}(m_1-m)$ devra être additive, et, comme la bulle aura marché du côté opposé, c'est le bout du niveau situé de ce côté qui devra porter le signe +.

Exemple. Distance zénithale d'Antarès observée à Sakka, en Afrique, par M^r. A. d'Abbadie, le 5 avril 1843. (1^p. du niveau = 13",1) :

	Moyenne des verniers	Niveau		
Cercle à droite :	u ... 145° 40' 0"	+ 4^p,0	− 3^p,0	$m = + 0^p,5$
Cercle à Gauche :	u_1 ... 214 17 0	+ 2,0	− 6,0	$m_1 = − 2,0$

$u_1 - u$ ..	68° 37 0
$\tfrac{1}{2}(u_1-u)$ ..	34 18 30
Correction du niveau	− 16,4
Z	34° 18' 13",6

$\tfrac{1}{2}(m_1 - m) = -1^p,25 = -16",4$.

Méthode de la Réitération appliquée aux angles verticaux.

On recommencera n fois la même mesure, mais en prenant chaque fois un autre point de départ, afin de ne pas retomber sur les mêmes traits, et par conséquent sur les mêmes erreurs. Pour cela, après la première mesure, on remettra l'instrument dans la position initiale (cercle à droite), et, au point de départ initial u, on substituera le point de départ

$$u + \frac{360°}{v.n}$$

v étant le nombre des verniers équidistants. — Le 3e. point de départ sera

$$u + 2.\frac{360}{v.n} \quad \text{etc.}$$

Il est facile d'apprécier le degré d'exactitude de la moyenne de ces n mesures. Nous avons vu qu'avec un Théodolite médiocre, l'erreur à craindre sur un angle u_1-u, mesuré directement, était de 9" en moyenne. Cette erreur sera donc de 4",5 sur $\tfrac{1}{2}(u_1-u)$ et elle se trouvera réduite à moins de

$$\frac{4'',5}{\sqrt{n}}$$

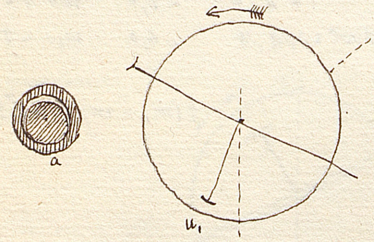
après n réitérations (1). – à ne considérer que les erreurs dont nous nous sommes occupés jusqu'ici, une dizaine de mesures suffisent amplement, avec les Grands Théodolites de Gambey pour mesurer une distance zénithale à une seconde près, au moins.

Méthode de la Répétition
appliquée aux angles verticaux.

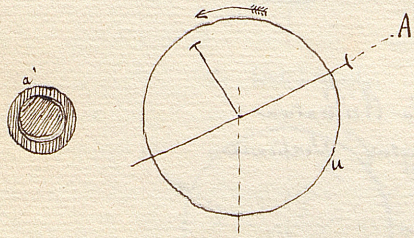
Nous allons la décrire, quoiqu'elle doive être absolument rejetée. –

Après avoir mesuré comme précédemment l'angle $u_1 - u = 2Z$, on répète la même observation, sans lire les verniers en u_1, en prenant pour point de départ l'extrémité de cet arc, c.à.d. la position actuelle des verniers et de la lunette sur le limbe divisé afin d'ajouter à l'arc déjà parcouru sur ce limbe un nouvel arc égal à 2Z. Pour cela il faut une manœuvre spéciale, qui est ici figurée de (4°) à (1°). On commence par ramener le cercle vertical à droite, sans toucher aux vis de serrage des pinces. Dans cette position (4°) on desserre la pince qui retient le cercle divisé, et l'on ramène la lunette sur l'objet A (1°) en faisant tourner ensemble les deux cercles et la lunette autour de l'axe horizontal du cercle divisé. alors, on serre la pince de ce cercle, et la vis de rappel servira pour achever le pointé.

4°. Cercle à Droite.

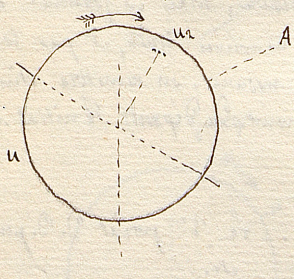


1°. Cercle à Droite.

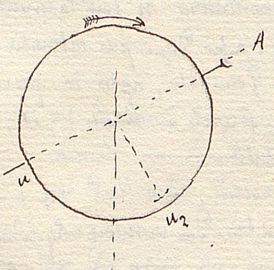


Par cette manœuvre, l'instrument se trouve en (1°) dans une situation exactement pareille à (1° p. 300) et prêt pour une seconde mesure de l'arc 2Z : mais le point de départ de cette nouvelle mesure sera u_1 et non plus u. D'ailleurs cette mesure s'achèvera comme précédemment, par les manœuvres figurées en (2°) et (3°). Si l'on s'arrêtait là, il faudrait lire les verniers dont la moyenne serait u_2, et l'on aurait $u_2 - u = 2.2Z$. De même pour 3.2Z, pour 4.2Z ... n.2Z.

2°. Cercle à Gauche.



3°. Cercle à Gauche.



Dans cette méthode, on suppose que le point de départ de chaque mesure partielle, sur

---

(1) Je dis moins, parce que l'erreur moyenne de 9'', attribuée à $u_1 - u$, comprend les erreurs régulières de division ; or celles-ci se trouvent éliminées par la méthode de réitération.

le cercle divisé, est précisément l'extrémité de l'arc parcouru dans la mesure précédente. C'est là la condition fondamentale du succès. Or il est impossible qu'elle soit remplie quand il s'agit des angles verticaux. Cela tient à ce que la liaison établie entre le cercle vernier et le cercle limbe, à la fin de la 1ère mesure, est susceptible de varier lorsque ces deux cercles changent encore de position, par rapport à la direction de la pesanteur, dans la mesure suivante.

Pour que ces deux cercles fussent reliés invariablement l'un à l'autre, il faudrait qu'ils fussent fixés en deux points distincts : or ils ne le sont qu'en un seul, par la pince du cercle vernier qui reste serrée pendant les manœuvres figurées en (2°) et en (1°). À la vérité leurs axes, dont la coupe est reproduite sur cette dernière figure, sont emboîtés l'un dans l'autre ; mais ces axes ne constituent pas un second point d'attache parfait, parce que l'artiste leur laisse nécessairement un certain jeu, sans lequel tout mouvement serait impossible. Ce jeu a été exagéré à dessein dans les deux coupes. Or, dans la position (2°) l'axe intérieur (celui du cercle vernier et de la lunette) se trouve en contact avec la douille qui sert d'axe au cercle divisé en un certain point a, qui sera en général le plus bas possible, à cause du poids du cercle vernier et de la lunette. Après avoir fait tourner les deux axes cercles ensemble de l'angle 2Z ou de l'arc $u_1 - u$, pour les amener dans la position (1°), il faudrait que le point A a vînt en a' sans que le contact se détruisît.

Mais, par l'effet de la pesanteur, l'axe intérieur ne pourra rester tangent en a' ; il retombera dans la douille de tout l'intervalle laissé par le jeu des axes, car la pièce qui unit les deux cercles vers un point de la circonférence ne suffirait pas pour empêcher ce petit déplacement ; celui-ci s'effectuera par torsion ou autrement autour de ce point fixe comme autour d'un centre. Supposons que ce petit jeu soit seulement d'un centième de millimètre : la quantité angulaire α dont le cercle vernier se sera ainsi déplacé sera (s'il y a 200 millim. de diamètre)

$$\sin\alpha = \frac{0,01}{100} \quad \text{d'où} \quad \alpha = 206265'' \frac{0,01}{100} = 20'',6$$

Cet angle serait encore de 2'' si le jeu des axes était réduit à un millième de millimètre (1).

Ainsi l'instrument, dans la position (1°) n'est plus dans les conditions supposées par le principe de la répétition ; le point de départ de la 2e. opération n'est plus u_1, mais $u_1 - \alpha$ et l'arc qu'on y ajoutera au précédent étant toujours 2Z, on aura pour $u_2 - u$ non pas 2.2Z, mais 2.2Z − α.

À chaque opération, l'erreur α se reproduira, en sorte qu'au bout de n répétitions, l'arc $u_n - u$ sera égal, non à n.2Z, mais à n.2Z − (n−1)α. L'angle 2Z conclu de cet arc total sera donc

$$2Z - \frac{n-1}{n}\alpha \quad \text{ou} \quad 2Z - \alpha$$

à peu-près, reproduisant ainsi presque intégralement l'erreur introduite ici par la manœuvre de la répétition, quel que soit le nombre de ces manœuvres (2).

Voilà une de ces erreurs auxquelles on donne le nom de constantes, de régulières, ou de systématiques, parce qu'elles se reproduisent toujours les mêmes lorsque les cir-

---

(1) Un effet analogue se reproduirait encore si les vis de rappel dont les pinces sont pourvues avaient le moindre jeu dans leurs collets.

(2) Cette erreur systématique de la répétition peut aller de 2'' à 10'' avec les meilleurs instruments.

-constances où elles ont lieu se reproduisent elles-mêmes identiquement.

Les erreurs accidentelles, au contraire, n'en dépendent ni pour le signe, ni pour la grandeur: on peut les assimiler aux événements d'un tirage au sort.

Il est essentiel de faire remarquer ici que ce jeu ou ce ballottement des axes n'exerce aucune influence sur la mesure directe de l'angle 2Z, dans la méthode de réitération, parce que son effet est annulé par l'emploi de verniers équidistants, pourvu qu'on fasse la lecture de ces verniers dans la position même où le pointé de la lunette sur l'objet a été effectué. — On comprend d'ailleurs que le retournement à 180° du théodolite n'altère en rien les relations de position des deux cercles et de la lunette, puisque le retournement s'opère autour de la direction même de la pesanteur.

Si l'on voulait corriger le vice de la méthode de la répétition en lisant les verniers à chaque position (1°) on retomberait sur la méthode de réitération, sauf la distribution harmonique des points de départ de chaque mesure partielle.

Il ne faut pas croire que cette erreur systématique des cercles répétiteurs soit toujours la même dans le même instrument. Elle change rapidement avec la température qui fait varier le jeu des axes par la dilatation ou la contraction inégale de leurs parties, surtout quand la douille est en cuivre et l'axe en acier. Elle change avec l'état de fluidité des huiles qui servent à adoucir les frottements de ces axes et qui comblent l'espace où s'opère leur jeu. Elle change enfin avec l'usure, avec l'élasticité du ressort placé au bout de l'axe, etc. etc.

Aussi les combinaisons par lesquelles on a essayé d'éliminer cette erreur ont-elles échoué, lorsque ces combinaisons reposaient sur l'hypothèse que cette erreur restait toujours la même.

Cependant, dans une belle opération géodésique conduite, il y a 20 ans, par le colonel Brousseaud (mesure d'un arc du parallèle moyen) on est parvenu à faire disparaître cette erreur inhérente à la répétition, à une époque où l'on ne croyait pas pouvoir se passer de la répétition.

Nous allons indiquer le procédé d'observation suivi par le colonel Brousseaud, d'après l'illustre astronome Bessel, parce qu'il porte beaucoup plus loin que la destruction des erreurs d'une mauvaise méthode.

Quand on considère non seulement le jeu de l'axe du cercle des verniers qui porte la lunette, mais encore, d'une manière plus générale, l'influence de la gravité sur un appareil quelconque, les flexions et les déformations plus ou moins complexes que cette action peut produire sur un instrument de mesures précises, on comprend que les erreurs qui en résultent sont liées au sens qu'affecte la gravité. S'il était possible de l'intervertir, on intervertirait aussi le signe de ces erreurs. L'art de combiner les observations de manière à éliminer les erreurs systématiques consiste précisément à rechercher les cas de symétrie où ces erreurs sont nécessairement égales et de signe contraire; on est sûr alors que la moyenne de deux observations de cette espèce est exempte de l'erreur, quelle qu'en soit la grandeur. On ne peut changer le sens de la gravité, mais on peut renverser le ciel en quelque sorte, en observant les astres par réflexion sur un bain de mercure.

Dans les observations directes, les actions de la gravité tendent à éloigner de la gravité du zénith toutes les molécules de l'instrument; dans les observations réfléchies, elles tendent à les rapprocher du zénith réfléchi c.à.d. du nadir.

Si les erreurs dues à l'action de la pesanteur produisent une erreur $-x$, en

sorte qu'au lieu de la vraie distance zénithale Z d'un astre, l'instrument nous donne $Z-\alpha$ quand il est dirigé sur l'astre même, ces mêmes actions produisent une erreur $+\alpha$ sur la distance au Nadir, qu'on cherchera immédiatement après par réflexion, avec les mêmes instruments.

La moyenne de ces deux distances, $Z-\alpha$ et $Z+\alpha$ est la véritable distance de l'astre au Zénith, dégagée de toute erreur qui aurait sa source dans l'influence de la Gravité. – C'est encore ainsi, par exemple, qu'on élimine les effets de la flexion dans les diverses pièces.

Il y aurait encore, dans toutes les méthodes de mesure, d'autres causes d'erreur à considérer, telles que l'action des variations de la température. Bornons-nous à dire que l'observateur doit avoir soin d'éviter toute inégalité de répartition entre de la chaleur entre les diverses pièces de l'instrument. Il est essentiel surtout de le soustraire à l'action directe des rayons du soleil. Toute observation faite sous cette action doit être rejetée. Il faut également éviter d'observer lorsque l'atmosphère subit de fortes et rapides variations, parce qu'alors les diverses pièces de l'instrument ne peuvent suivre ces variations avec la même vitesse, à cause de l'inégalité de leurs masses.

Enfin l'action même de la main de l'observateur est une cause d'erreur dont on doit se préoccuper.

Quoique les mouvements de rotation des diverses pièces d'un théodolite soient en général très-doux et très-faciles, il faut pourtant exercer un petit effort pour les produire, et comme ces actions s'exercent tangentiellement au cercle divisé ou au cercle Vernier, par l'intermédiaire des vis de rappel, il en résulte une petite torsion de quelques millièmes de millimètre dans les rayons de ces cercles. Pour en éliminer les effets, on devra s'astreindre à faire en double chaque mesure, en tournant les vis de rappel tantôt dans un sens, tantôt dans le sens opposé. Il est de règle d'ailleurs de porter le moins possible la main sur l'instrument.

Il est évident que la méthode de la Répétition ne peut faire disparaître aucune de ces causes d'erreur.

Théodolite.

Le Théodolite est destiné à mesurer les coordonnées angulaires rapportées à la Verticale, c.à.d. les distances au Zénith et les azimuths.

Rigoureusement parlant, le Théodolite ne donne pas les azimuts absolus, mais seulem^t les différences d'azimuts, ou, si l'on veut, les azimuts comptés à partir d'une origine arbitraire; car l'origine des azimuts est, par convention, le plan méridien, dont la détermination exige naturellement des observations astronomiques.

Au reste, il en est de même de tous les instruments qui servent à mesurer des coordonnées angulaires, les unes dièdres, les autres planes: l'axe du système étant

donné, l'origine des angles plans est donnée par cela même, mais non celle des angles dièdres qui forment entre eux des plans assujettis à la seule condition de passer par l'axe. C'est ainsi que les instruments méridiens qui servent à mesurer les coordonnées célestes (distances polaires et ascensions droites) réalisent bien l'origine des distances polaires, mais non celle des ascensions droites. Celle-là dépend, par convention, de la situation de l'orbite terrestre. — De même encore une pendule ou un chronomètre peuvent servir à mesurer les différences de temps ou d'angles horaires, mais ne donnent point par eux-mêmes et sans l'intervention d'instruments astronomiques, l'heure absolue qui se compte à partir du passage du point vernal au méridien.

Puisque le théodolite s'adapte à la mesure des coordonnées angulaires dont le système a pour axe la verticale, il faut que cet instrument réalise à la fois cet axe et les plans passant par cet axe. — Il doit donc satisfaire aux 3 conditions suivantes:

1°. L'axe optique de la lunette doit décrire un plan quand on fait tourner la lunette autour de son axe de rotation; par conséquent, cet axe optique doit être perpendiculaire à l'axe de rotation.

2°. Ce plan doit être vertical, par conséquent l'axe de rotation de la lunette doit être horizontal;

3°. Ce plan vertical doit prendre toutes les directions possibles sans cesser d'être vertical; par conséquent l'instrument doit avoir un axe vertical autour duquel puisse tourner la lunette avec son cercle vertical, et son axe horizontal de rotation.

Du reste, que l'instrument soit employé à répéter les angles ou à réitérer simplement les mesures, sa construction sera la même.

De là, trois rectifications principales, à savoir:

Rendre vertical l'axe de rotation de l'instrument;

Rendre horizontal l'axe de rotation de la lunette;

Rendre l'axe optique perpendiculaire à l'axe de rotation de la lunette.

Ajoutons que le réticule doit être placé avec le plus grand soin dans le plan focal où viennent se former les images des objets visés, et que l'un de ses fils doit être horizontal. L'autre fil croise celui-là à angle droit, par construction; il est d'ailleurs facile de vérifier cette perpendicularité.

Quant aux trois rectifications principales, on ne peut espérer de les effectuer à la main avec une exactitude parfaite; d'ailleurs, y eût-on réussi, elles ne se maintiendraient pas longtemps, et bientôt, par l'effet des changements de température, ou par l'instabilité des supports, l'instrument se trouverait dérangé. Il s'agit donc d'observer avec un instrument incomplètement rectifié, et dont les erreurs sont variables.

Tel est le problème que se pose la pratique.

Pour le résoudre, il suffira de considérer l'instrument, dans son état actuel, comme constituant un système de coordonnées infiniment peu différent du système théorique, en sorte que pour passer de l'un à l'autre, il ne sera pas nécessaire d'employer des formules complètes de transformation, mais seulement d'ajouter aux angles observés des corrections où l'on traitera les erreurs de l'instrument comme des quantités infiniment petites, et où l'on pourra étudier à part l'influence de chacune d'elles comme si les autres n'existaient pas.

Ces formules de correction deviennent alors des fonctions très-simples des erreurs instrumentales, et la question se réduit à déterminer ces erreurs pour

l'instant de l'observation. — Or les procédés de la rectification en fournissent les moyens. Par exemple, les deux niveaux serviront à mesurer la petite inclinaison de chaque axe sur la verticale ou sur l'horizontale.

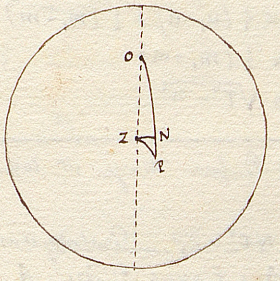
De même, quand il fallait corriger le défaut de perpendicularité de l'axe optique sur l'axe de rotation de la lunette, défaut qu'on nomme Erreur de Collimation, on a dû faire mouvoir le réticule de la lunette jusqu'à ce que l'on eût obtenu, sur le cercle horizontal, des lectures différant juste de 180° en pointant alternativement la lunette, dans les deux positions de l'instrument (cercle à droite et cercle à gauche) sur un signal très éloigné.

S'il s'agit maintenant de mesurer l'erreur résultant de cette opération, c.à.d. l'erreur de Collimation, il suffira évidemment de prendre la moitié du nombre de secondes dont la différence des deux lectures s'écarte de 180°. (1)

Soient donc I l'inclinaison de l'axe principal, i l'inclinaison de l'axe horizontal, et c l'erreur de Collimation. — Soient encore z_1, A_1 les résultats bruts de l'observation, c.à.d. les coordonnées instrumentales de l'objet observé, et z, A ses coordonnées réelles. Cherchons la correction qu'il faut ajouter à z_1 et A_1 pour avoir z et A.

1°. Distances Zénithales. — Correction due à l'inclinaison I. —

Imaginons une sphère dont le centre soit la station même de l'observateur, et dont le rayon soit assez grand pour qu'on puisse négliger la position excentrique de la lunette et de son cercle : les directions de la verticale, de l'axe principal, et du rayon visuel dirigé vers l'objet seront marquées sur cette sphère par les points Z, P et O. — Projetons orthogonalement sur le plan de l'horizon ces points et les arcs de cercle tracés sur cette sphère idéale.



L'instrument donne

$$PO = \frac{1}{2}(u_1 - u)$$

Le niveau donne

$$NP = \frac{1}{2}(m_1 - m) = n$$

Quant à l'arc $ZP = I$, on le trouvera aisément à l'aide du niveau en opérant dans la direction où n atteint son maximum. Nous avons vu que

$$z_1 \text{ ou } NO = \frac{1}{2}(u_1 - u) + n$$

Quant à z, on le déterminera par la formule de la Réduction à l'Écliptique (p. 372)

$$z - z_1 = Tg^2 \tfrac{1}{2} O \sin 2z.$$

---

(1). Si le point visé est situé à une distance d qui ne soit pas très grande, il devient nécessaire de tenir compte de l'excentricité de la lunette, c.à.d. de la plus courte distance E de son axe optique à l'axe vertical de rotation. On calculera alors l'angle $\frac{E}{d \sin 1''}$ sous lequel E est vu du point dont la distance est d.

S'il y a une erreur de collimation c, on aura la relation suivante entre les deux lectures u et u' faites quand la lunette a été successivement dirigée sur le signal, dans les deux positions de l'instrument :

$$u' - u = 180° - 2\frac{E}{d \sin 1''} - 2c.$$

or le triangle sphérique ZON, rectangle en N, donne

$$\frac{\sin O}{\sin ZN} = \frac{1}{\sin z}$$

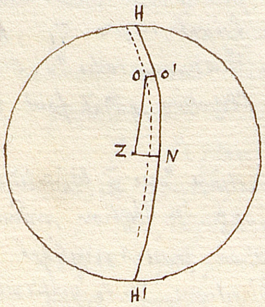
ou

$$O = \frac{n'}{\sin z}, \text{ en faisant } NZ = n' = \sqrt{I^2 - n^2}$$

Donc enfin

$$z = z_1 + \frac{\frac{1}{2} n'^2 \sin 1''}{\operatorname{Tg} z}.$$

Corrections dues à $\underline{i}$ et à $\underline{c}$. — Nous supposerons maintenant I nul, puisque nous traitons chaque erreur à part, comme si les autres n'existaient pas. L'axe de rotation de la lunette étant incliné de i, le plan du cercle de la lunette ne passera pas par le zénith, mais coupera la sphère céleste suivant un grand cercle dont la projection sera HNH'. De plus, comme l'axe optique de la lunette fait avec le plan de ce cercle un angle $\underline{c}$, il décrira en tournant, un cône, qui coupera la sphère suivant un petit cercle parallèle à HNH', et passant par les objets observés. La distance zénithale z de l'objet est ZO ; sa distance mesurée est NO', projection de ZO sur HNH'. or ZN = i, OO' = c : donc



$$z - z_1 = -\frac{ic \sin 1''}{\sin z} + \frac{\frac{1}{2}(i^2 + c^2)\sin 1''}{\operatorname{Tg} z} \qquad (1)$$

ainsi la correction complète est

$$z = z_1 + \frac{\frac{1}{2} n'^2 \sin 1''}{\operatorname{Tg} z} - \frac{ic \sin 1''}{\sin z} + \frac{\frac{1}{2}(i^2 + c^2)\sin 1''}{\operatorname{Tg} z}$$

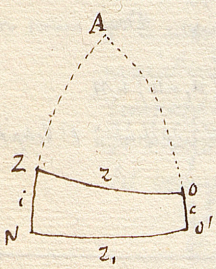
où l'on a

$$z_1 = \tfrac{1}{2}(u_1 - u) + \tfrac{1}{2}(m_1 - m)$$
$$n = \tfrac{1}{2}(m_1 - m)$$
$$n' = \sqrt{I^2 - n^2}$$

---

(1) La formule approchée dont on vient de faire usage est connue sous le nom de Réduction d'un angle à l'horizon.

Soit l'arc ZO = z projeté sur NO' = z_1. — Prolongeons les arcs NZ, O'O jusqu'à leur rencontre en A ; l'angle dièdre A aura pour mesure z_1 et le triangle AZO donnera la relation



$$\cos z = \sin i \sin c + \cos i \cos c \cos z_1,$$

Comme la différence $z - z_1$ est du 2e ordre de petitesse (p. 272) il faudra tenir compte des termes de cet ordre en remplaçant sin i, cos i par leurs développements en i et c.

On obtient ainsi la formule suivante, qui se trouve exacte jusqu'aux termes du 3e ordre inclusivement :

$$z - z_1 = -\frac{ic \sin 1''}{\sin z} + \frac{\frac{1}{2}(i^2 + c^2)\sin 1''}{\operatorname{Tg} z}.$$

On lui donne assez souvent une autre forme à laquelle on arrivera en remplaçant

$$\sin z \text{ par } \frac{2 \operatorname{Tg} \frac{1}{2} z}{1 + \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} z} \quad \text{et } \operatorname{Tg} z \text{ par } \frac{2 \operatorname{Tg} \frac{1}{2} z}{1 - \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} z}$$

la voici :

$$z - z_1 = \frac{\left(\frac{i-c}{2}\right)^2}{\operatorname{Tg} \frac{1}{2} z} - \frac{\left(\frac{i+c}{2}\right)^2}{\operatorname{Cot} \frac{1}{2} z}.$$

aucune de ces corrections ne change de signe avec la position de l'instrument (cer-cle à droite ou cercle à gauche). Le premier et le dernier terme correctifs sont nuls pour des objets placés à l'horizon. — Afin d'apprécier l'importance de cette correction, fai-sons $I = i = c = 60''$ ce qui est énorme. On trouvera aisément

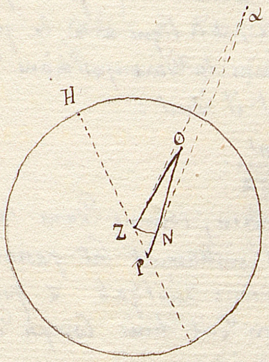
$$z = z_1 + \frac{0'',035}{\mathrm{Tg}\,z} \mp \frac{0'',017}{\mathrm{Sin}\,z}$$

Pour qu'elle devînt sensible ($0'',5$ par ex.) il faudrait que Sin z ou Tg z fussent égaux à $\frac{1}{10}$ environ, ou que z fût de 6° au plus. En s'astreignant, comme on le fait, à n'observer jamais si près du Zénith avec un théodolite, on pourra donc négliger ces corrections, et sauf celle que fournit le niveau, et écrire

$$Z = Z_1 = \frac{1}{2}(u_1 - u) + \frac{1}{2}(m_1 - m)$$

2°. Azimuts. — Correction due à $I = PZ$.

L'origine des azimuts étant arbitraire jusqu'ici, convenons de la compter à partir de la direction PZ. L'azimut du point O sera $HZO = A$; l'azimut donné par l'instrument sera $HPO = A_1$. Si l'on mène en Z et en P des tangentes aux arcs ZO et PO, ces tangentes se rencontreront en α, et formeront un triangle très-étroit αZP qu'on pourra considérer comme projeté en véritable grandeur sur le plan de la figure (l'horizon). On aura donc $A - A_1 = \alpha$. Or, dans le triangle αZP, où $Z\alpha = \mathrm{Tang}\,z$, on a l'analogie



$$\frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{I\,\mathrm{Sin}\,1''} = \frac{\mathrm{Sin}\,A_1}{\mathrm{Tg}\,z}$$

D'ailleurs

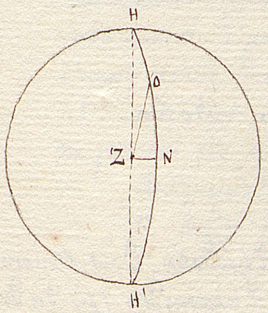
$$\mathrm{Sin}\,A_1 = \frac{ZN}{ZP} = \frac{n'}{I} \quad \text{en posant} \quad n' = \sqrt{I^2 - n^2}$$

Donc

$$A = A_1 + \frac{n'}{\mathrm{Tg}\,z}$$

Correction due à i.

HN étant la trace du cercle de la lunette sur la sphère céleste, $ZN = i$, et la direction azimutale de l'objet O est don-née en ZH par l'instrument, tandis que la vraie direction azimutale est ZO. La différence β est le complément de l'angle en Z du triangle rectangle OZN, lequel donne



$$\mathrm{Tg}\,i = \mathrm{Tg}\,z\ \mathrm{Sin}\,\beta$$

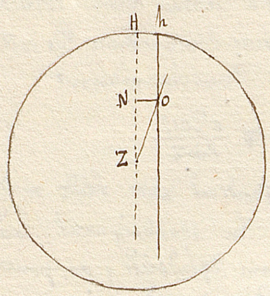
d'où

$$\beta = \frac{i}{\mathrm{Tg}\,z}$$

Cette correction change évidemment de signe, d'une position de la lunette à la position symétrique.

Correction due à c.

(voir la fig. à la p. suiv.) — ZH représente le plan vertical du cercle de la lunette, et hO le parallèle décrit par la lunette à cause de l'erreur de collimation. $Hh = c$. — La direction azimutale d'un objet O vu dans,



la Lunette est ZO, mais la direction donnée par l'instrument est ZN ; la différence β sera donnée par le triangle sphérique rectangle NOZ, où l'on a NO = c :

$$\frac{\sin\beta}{\sin c} = \frac{1}{\sin z}$$

d'où

$$\beta = \frac{c}{\sin z}.$$

Cette correction change évidemment de signe avec la position droite ou gauche du cercle.

En réunissant ces trois corrections, on trouve pour la direction azimutale vraie de l'objet O :

$$A = A_1 + \frac{n'}{\operatorname{tg} z} \pm \frac{i}{\operatorname{tg} z} \pm \frac{c}{\sin z}$$

Formule où le signe + répond, suivant les conventions faites pour les signes de i et de c, à la position Cercle à Droite, et le signe – à la position Cercle à Gauche. – d'où l'on voit qu'en observant dans les deux positions de l'instrument, les deux derniers termes s'annulent, et il vient :

$$A = A_1 + \frac{n'}{\operatorname{tg} z}$$

ou même, s'il s'agit d'objets situés à l'horizon, comme dans la plupart des opérations géodésiques, $A = A_1$ pourvu que l'instrument soit passablement rectifié.

Quand il s'agit d'astres dont la distance zénithale z peut varier notablement pendant la série des observations, on doit tenir compte de ces corrections.

Pour faire un usage tout-à-fait rationnel du théodolite, il faut de plus connaître et savoir mettre en usage les procédés d'élimination des erreurs systématiques, procédés qui se résument essentiellement dans le retournement, l'observation par vision directe et par vision réfléchie, et le choix de points équidistants de la circonférence divisée pour origine des angles. – Si nous avons insisté sur ces méthodes, c'est qu'elles s'appliquent à tous les instruments de mesure aussi bien qu'au théodolite.

Cercle Répétiteur de Borda.

Avant l'introduction en France du théodolite, dont l'invention et l'exécution première sont dues au célèbre artiste anglais Ramsden (fin du dernier siècle), on se servait du Cercle Répétiteur de Borda, dont la construction beaucoup plus simple, surtout sous le rapport des axes, ne présentait pas autant de difficultés d'exécution aux artistes de cette époque.

Le cercle répétiteur ne mesure que des angles plans, tout comme le Sextant ; il ne donne point directement les azimuts ou leurs différences. Pour mesurer ces dernières coordonnées, voici comment on opérait.

à l'aide de deux mouvements de rotation successifs, on inclinait le plan du cercle de l'instrument, et on l'amenait dans la direction des deux objets A et B : alors on mesurait l'angle AB. Puis on ramenait le cercle dans la position verticale, et l'on mesurait la distance zénithale AZ de l'objet A et celle BZ de l'objet B : la résolution du triangle sphérique ZAB faisait connaître l'angle en Z, c.à.d. la différence en azimuts de A et de B.

Quand il s'agissait de signaux terrestres, le calcul de l'angle dièdre Z était un peu simplifié : comme il diffère alors très peu de l'angle plan AB, on calculait leur différence par la formule approchée de la réduction d'un angle à l'horizon (p. 308). – Mais, pour déterminer l'azimut absolu d'un signal, il faut mesurer sa distance angulaire à un astre quelconque, dont les coordonnées sont connues ; alors la manœuvre du cercle répétiteur devenait encore plus pénible, parce que le plan des deux objets changeant sans cesse de direction par suite du mouvement de l'astre, il fallait continuellement maintenir le cercle dans ce plan : aussi deux observateurs étaient-ils alors nécessaires.

Disons encore que la position inclinée du cercle était une condition défavorable à l'exactitude des mesures : toutes les parties d'un instrument doivent être, autant que faire se peut, disposées symétriquement autour de la verticale.

Le Sextant.

Description du sextant. – Son principe. – Rectification de ses diverses parties.

On pourrait faire à cet instrument les mêmes objections qu'au cercle répétiteur ; mais il ne faut point oublier que le sextant n'est pas destiné à mesurer les angles à une fraction de seconde près, mais à une fraction de minute près.

Le principal avantage du sextant tient d'une part à ce que le pointé dans les deux directions dont on veut avoir l'angle n'est pas successif, comme dans les instruments précédents, mais simultané ; et d'autre part, à ce que le rayon doublement réfléchi ne change pas de direction, quoiqu'on incline les deux miroirs autour d'une droite perp. au plan du plan du sextant, pourvu que l'angle actuel des deux miroirs ne varie pas lui-même. Il en résulte que cet instrument n'a pas besoin d'un support fixe. – aucun autre instrument ne pourrait être employé en mer.

Rectification des diverses pièces du sextant :

1°. Rendre le grand et le petit miroirs perp. au plan du limbe ;

2°. Rendre l'axe optique de la lunette parallèle au plan du limbe.

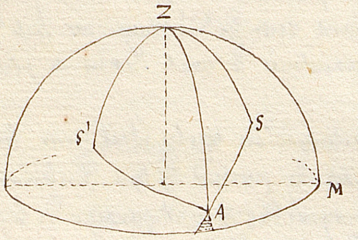
La notion d'axe optique n'intervient pas, à proprement parler, dans la théorie du sextant ; il faut seulement s'astreindre à opérer la coïncidence des images vers le milieu du champ.

La région favorable s'y trouve indiquée par deux fils parallèles au plan du limbe, et c'est le plan passant par le centre optique de l'objectif et au milieu de l'intervalle des deux fils qu'il faut rendre parallèle au plan du limbe. Il y a des vis de rappel pour toutes ces rectifications, qui doivent être effectuées à quelques

minutes près (1).

Avec le Sextant, comme avec le cercle Répétiteur, on ne mesure point un système complet de coordonnées sphériques, mais seulement la distance Zénithale d'un objet ou sa distance angulaire à un autre point. — Cependant, comme un point de la Sphère se trouve déterminé par sa distance angulaire à deux autres points connus, tout aussi bien que par des coordonnées polaires, on peut considérer les distances que l'on mesure au Sextant comme de véritables coordonnées auxquelles on appliquera des formules de transformation spéciales.

Supposons par exemple qu'on ait mesuré au Sextant les distances AS, AS' ou d et d', d'un même point A au Soleil, à deux heures t et t' : il sera facile d'en déduire les coordonnées du point A, c.à.d. la distance Zénithale Z et son azimut AZM = X. En effet, on déduira des Ephémérides les coordonnées polaires du Soleil pour les heures t et t' ; puis, à l'aide de la Latitude du lieu, et des formules de transformation des coordonnées, on calculera les distances z et z' et les azimuts S, S' du Soleil pour les mêmes instants. Dès lors les deux triangles AZS et AZS' donneront les deux Equations suivantes



$$\cos d = \cos z \cos Z + \sin z \sin Z \cos (X - S)$$
$$\cos d' = \cos z' \cos Z + \sin z' \sin Z \cos (X - S')$$

On voit par là qu'un Sextant suffit parfaitement pour résoudre toutes les questions qui se ramènent à des mesures de coordonnées sphériques ; il suffit au marin, au Géographe, au voyageur qui veut relever les points remarquables sur sa route, ou à l'ingénieur chargé de préparer le canevas d'une opération Géodésique.

La précision que l'on obtient avec le Sextant bien rectifié dépend surtout de l'exactitude avec laquelle on a déterminé son erreur d'excentricité, dont il faut nécessairement tenir compte dans toutes les mesures. Admettons que cette erreur soit bien connue, et qu'on en ait purgé les observations : il restera les erreurs de division, celles de lecture et celles du pointé, auxquelles il faut ajouter l'erreur du zéro ou plutôt de l'origine à partir de laquelle on compte les angles. Quand il s'agit d'observations astronomiques, on détermine cette origine, qui correspond au parallélisme des deux miroirs, en amenant successivement au contact les bords opposés des deux Images du Soleil, et en prenant la moyenne des Lectures du Vernier.

Supposons par exemple qu'on ait trouvé ainsi

1er	contact	2' 30"
2e	"	1° 6' 40"
	moyenne	34' 35"

La demi-somme 34' 35" indique que les angles mesurés au Sextant ont ce

---

(1) Il faut aussi examiner si les faces du Grand miroir sont bien parallèles. On s'en assure en regardant le Soleil par réflexion à l'aide d'une Lunette plus forte que celle du Sextant. Si la face non Etamée donne une Image distincte de la face Etamée, le miroir est prismatique et doit être Rejeté.

point pour origine (1), et il faudra retrancher ces 32' 3 5" de toutes les lectures faites au Vernier de l'Instrument.

Or, quoiqu'on puisse réitérer cette détermination un grand nombre de fois, de manière à atténuer l'erreur qu'elle comporte, il faut cependant estimer cette erreur là à 10"; celle de la lecture du vernier à 10", à 15" l'erreur de division, et à 8" celle du pointé avec une faible lunette qui ne grossit guères que 6 à 8 fois. - Quant aux erreurs dues à une rectification imparfaite, elles montent à peine à quelques secondes, si l'on a pris les soins convenables :- on peut en tenir compte par le calcul.

Si toutes les erreurs possibles étaient de même sens, on voit que l'erreur d'un angle mesuré au Sextant irait à

$$10'' + 10'' + 15'' + 8'' = 23''$$

En moyenne, on peut la porter à 22", et s'il s'agit de hauteurs mesurées par réflexion sur un horizon artificiel, l'erreur se trouvera réduite à moitié par la division par 2, parce que l'Instrument donne alors le double de la hauteur de l'astre.

Les observations faites en mer sont généralement moins précises, à cause de l'incertitude qui règne souvent sur la valeur angulaire de la dépression de l'horizon sensible, auquel on rapporte les observations de hauteur. La dépression vraie, celle qui aurait lieu si l'atmosphère n'existait pas, a pour formule

$$\frac{1}{\sin 1''} \sqrt{\frac{2h}{R}}$$

h étant la hauteur de l'œil au dessus du niveau de la mer, et R le rayon terrestre, tandis que la dépression apparente est moindre, à cause de la réfraction atmosphérique qui élève un peu l'horizon visuel.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que l'observateur avait tenu compte de l'erreur d'excentricité. Nous avons encore admis tacitement que cette erreur reste constante et que l'instrument conserve la forme circulaire malgré les dilatations et les changements de températures. Toutes ces hypothèses gratuites sont fâcheuses; il vaut mieux employer, comme le proposait Tobie Mayer, un cercle entier au lieu d'une portion de cercle.

Le Cercle de Réflexion est donc bien préférable au Sextant. Borda l'a même disposé de manière qu'on y puisse appliquer la méthode de la Répétition. - Son avantage devient encore plus sensible quand on y substitue, comme l'a proposé le chevalier Amici, des prismes de verre aux miroirs étamés (2), et quand on renforce la puissance optique de la lunette par un objectif à 2 lentilles.

Il est bien établi qu'avec un tel cercle, de dix à douze centimètres de rayon, on atteindrait une précision de 3", ce qui suffit à toutes les exigences de la Géographie, et même à beaucoup d'opérations de la Géodésie de second ordre.

Ajoutons qu'avec les cercles entiers à réflexion, on parvient à éliminer entièrement presque toutes les erreurs instrumentales, par certaines combinai-

---

(1). La demi-différence donne le diamètre angulaire du Soleil, qui est ici de 32' 5". En comparant ce diamètre observé avec celui que les Ephémérides astronomiques indiquent pour le même jour, on peut se faire une idée de l'exactitude de l'observation.

(2) La réflexion par ces prismes est totale, et les images sont bien plus vives qu'avec les miroirs étamés.

-tions d'observations, et qu'on mesure tous les angles possibles, de 0° à 180°, tandis qu'avec le sextant, on ne dépasse guères, à cause de sa construction même, des angles de 130° ou de 140°.

Réfractions.

On a trouvé (p. 247) la formule

$$d\rho = -\frac{\frac{r_1 l_1}{r l}\sin z_1 \frac{dl}{l}}{\sqrt{1-\left(\frac{r_1 l_1}{r l}\sin z_1\right)^2}}.$$

Il faut trouver une relation entre r et l.

Essayons la relation

$$\frac{r_1}{r} = \left(\frac{l}{l_1}\right)^m$$

qui paraît s'adapter passablement au décroissement réel des densités (1). L'élimination de r se fait facilement. Car de l'éq.

$$r l \sin I = r_1 l_1 \sin I_1 = \text{Const.} \qquad \text{(p. 247)}$$

on tire

$$\frac{r_1 l_1}{r l}\sin z_1 = \left(\frac{l}{l_1}\right)^{m-1}\sin z_1 = y \quad \text{(pour abréger)}$$

d'où

$$(m-1)\, d\rho = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

et, en prenant l'intégrale entre les limites $y = \sin z_1$ relative au sol, et $y = \frac{1}{l_1^{m-1}}\sin z_1$ relative à la couche où $l=0$, c.à.d. à la limite extrême de l'atmosphère, on aura

$$(m-1)\rho = z_1 - \text{arc}\left(\sin = \frac{1}{l_1^{m-1}}\sin z_1\right)$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sin z_1 = l_1^{m-1}\sin\{z_1-(m-1)\rho\}$$

Cherchons à dégager ρ. On a

$$\sin\{z_1-(m-1)\rho\} = \frac{1}{l_1^{m-1}}\sin z_1$$

on peut écrire

$$\sin z_1 - \sin\{z_1-(m-1)\rho\} = \left(1-\frac{1}{l_1^{m-1}}\right)\sin\left(z_1 - \frac{m-1}{2}\rho + \frac{m-1}{2}\rho\right)$$

ou

$$2\sin\frac{m-1}{2}\rho\,\cos\left(z_1-\frac{m-1}{2}\rho\right) = \left(1-\frac{1}{l_1^{m-1}}\right)\left\{\sin\left(z_1-\frac{m-1}{2}\rho\right)\cos\frac{m-1}{2}\rho + \sin\frac{m-1}{2}\rho\cos\left(z_1-\frac{m-1}{2}\rho\right)\right\}$$

ou encore

---

(1). On peut démontrer que cette expression est insuffisante pour représenter complètement le décroissement des densités dont la loi paraît fort complexe : mais elle a l'avantage de se prêter à une intégration facile de $d\rho$. D'ailleurs, nous la prenons comme une 2de approximation de cette théorie, et nous la retrouverons encore dans la théorie des réfractions géodésiques.

$$\left(1+\frac{1}{\rho_1^{m-1}}\right)\sin\frac{m-1}{2}\rho\,\cos\left(z_1-\frac{m-1}{2}\rho\right)=\left(1-\frac{1}{\rho_1^{m-1}}\right)\sin\left(z_1-\frac{m-1}{2}\rho\right)\cos\frac{m-1}{2}\rho$$

D'où enfin

$$\operatorname{Tg}\frac{m-1}{2}\rho=\frac{\rho_1^{m-1}-1}{\rho_1^{m-1}+1}\operatorname{Tg}\left(z_1-\frac{m-1}{2}\rho\right) \qquad (1)$$

formule où ρ n'est pas encore dégagé, mais qui se prête à un calcul d'approximations successives.

On pourra déterminer l'exposant m d'après le décroissement de densité qui s'observe dans l'atmosphère à mesure qu'on s'y élève : mais il vaut encore mieux le déterminer par voie d'observation directe sur les réfractions astronomiques que cette formule doit représenter. – On a trouvé ainsi $m = 7{,}5$. – ρ_1 est connu. Par suite, la réfraction ρ qui répond à la distance zénithale apparente z_1, et à la densité de la couche inférieure marquée par $b = 0^m{,}760$ et $t = 0$ aura pour expression

$$\rho = 60'',666\ \operatorname{Tg}(z_1 - 3{,}25\,\rho)$$

Au lieu d'opérer sur l'expression complète de la réfraction, il est plus simple de développer en série la formule (1) et de considérer ensuite les coefficients de cette série comme des indéterminées dont la valeur devra être fixée par l'observation. – Pour abréger, écrivons ainsi l'Eq. (1)

$$\operatorname{Tg} n\rho = p\operatorname{Tg}(z_1 - n\rho)$$

En développant :

$$\operatorname{Tg} n\rho = p\cdot\frac{\operatorname{Tg} z_1 - \operatorname{Tg} n\rho}{1+\operatorname{Tg} z_1 \operatorname{Tg} n\rho}$$

D'où

$$\operatorname{Tg} z_1 \operatorname{Tg}^2 n\rho + (p+1)\operatorname{Tg} n\rho - p\operatorname{Tg} z_1 = 0$$

$$\operatorname{Tg} n\rho = \frac{p+1}{2\operatorname{Tg} z_1}\left\{-1+\left(1+\frac{4p\operatorname{Tg}^2 z_1}{(p+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

Développant en série, on aura

$$\operatorname{Tg} n\rho = \frac{p}{p+1}\operatorname{Tg} z_1 - \frac{2p^2}{(p+1)^3}\operatorname{Tg}^3 z_1 + \cdots$$

On pourra donc poser

$$\rho = A\operatorname{Tg} z_1 + B\operatorname{Tg}^3 z_1 + C\operatorname{Tg}^5 z_1 + \cdots$$

On a trouvé

$$\rho = 60'',567\operatorname{Tg} z_1 - 0'',067\operatorname{Tg}^3 z_1$$

Cette formule est plus exacte que celle où il n'entre que la 1ère puissance de $\operatorname{Tg} z_1$, mais elle ne s'applique pas à l'horizon.

Réfraction Géodésique ou Terrestre.

Le problème consiste à déterminer la somme des angles de contingence de la trajectoire lumineuse entre deux points voisins.

Des relations (p. 247)

$$r\frac{dv}{dr} = \operatorname{tg} I$$

$$d\rho = -\frac{dl}{l}\operatorname{tg} I$$

on tire, en éliminant I,

$$d\rho = -\frac{r}{l}\frac{dl}{dr}\,dv$$

qui est l'Eq. différentielle de la Réfraction Géodésique. Mais il faut encore y introduire une relation entre les variables l et r.

Reprenons donc l'hypothèse (p. 315)

$$\frac{r_1}{r} = \left(\frac{l}{l_1}\right)^m$$

ou

$$r\,l^m = r_1 l_1^m = \text{Const.}$$

on en tire

$$l^m dr + m r l^{m-1} dl = 0$$

$$\frac{r}{l}\frac{dl}{dr} = -\frac{1}{m}$$

L'Eq. différentielle de la Réfraction se réduit alors à

$$d\rho = +\frac{1}{m}dv$$

d'où

$$\rho = \frac{1}{m}v\,.$$

Cet angle au centre v auquel la Réfraction est proportionnelle (dans l'hypothèse admise ci-dessus pour la loi de succession des densités) se déduit aisément du calcul des triangles Géodésiques qui relient les diverses Stations. Ce calcul donne en effet, en mètres, la longueur c de l'arc de grand cercle compris entre les verticales des deux Stations : cet arc c se trouve d'ailleurs compté sur la surface de niveau de la mer. Or, des éléments de l'Ellipsoïde terrestre, et de l'azimut relatif des deux Stations, on déduira aisément, en mètres, le rayon de courbure R de cet arc : on aura donc $Rv = c$, en supposant l'arc v exprimé en parties du rayon, ou

$$v = 206265''\,\frac{c}{R}$$

si l'on veut avoir v en secondes. — Au lieu de calculer le rayon de courbure R, on peut se contenter souvent du 1/2 grand-axe

$$a = 6\,377\,398^m \quad (\text{son Log. est } 6{,}8046435)$$

dont les rayons de courbure ne diffèrent jamais beaucoup.

Si, au lieu de la relation hypothétique que nous venons d'adopter une seconde fois, on introduisait dans cette analyse une autre relation, celle par exemple à laquelle Laplace s'est arrêté dans sa théorie des Réfractions astronomiques, la

Réfraction ne serait plus rigoureusement proportionnelle à l'angle au centre. Mais, comme il s'agit toujours en Géodésie d'une faible différence de niveau, on peut aussi représenter avec une approximation suffisante le décroissement des densités δ ou des indices l qui a lieu dans une couche peu épaisse par la formule adoptée

$$\frac{r_1}{r} = \left(\frac{l}{l_1}\right)^m \qquad (1).$$

La réfraction $\rho = \frac{1}{m} v$ est l'angle des tangentes extrêmes de la trajectoire lumineuse comprise entre les deux stations; elle est donc la somme des angles que ces deux tangentes font avec la corde, angles qui portent, en Géodésie, le nom de Réfraction.

Nous en avons la somme $\frac{1}{m} v$, m étant supposé connu, mais cette relation ne suffit pas pour les déterminer individuellement; il faudrait encore connaître leur différence par exemple.

Or, on s'assure aisément que cette différence est excessivement faible dans presque tous les cas qui se présentent en Géodésie; on admet donc qu'elle est négligeable, ou plutôt nulle, ce qui revient à confondre la portion considérée de la trajectoire lumineuse avec le cercle osculateur au milieu de cet arc.

Dès lors, en désignant par ρ la réfraction géodésique, et non plus la réfraction astronomique, on a

$$\rho = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m} v = \gamma v.$$

γ étant le coefficient de la réfraction géodésique.

Détermination du coefficient γ. – D'après cette théorie, γ est la moitié de $\frac{1}{m}$: or la constante m a pour valeur 7,5 d'après la théorie précédente des réfractions astronomiques. Donc

$$\gamma = \frac{1}{15} = 0{,}0667$$

Telle est aussi la valeur (2) que lui assignent les beaux nivellements géodésiques de MM. Struve, Gauss, Col. Corabœuf, G.al Baeyer.

Cependant, cette valeur de γ ne doit être considérée que comme une valeur moyenne, elle varie avec les heures de la journée, parce que la distribution verticale des densités dans les couches basses varie d'une manière sensible sous l'influence de la chaleur solaire et du rayonnement nocturne. C'est seulement dans la partie moyenne de la journée que ce coefficient acquiert sa valeur normale 0,0667. Aussi les instants les plus favorables pour les opérations du nivellement géodésique se trouvent-ils entre 1 et 2 heures après le lever du soleil ou avant son coucher, précisément à l'oppo

---

(1). La relation entre l'indice l et la densité δ d'une couche d'air étant, d'après les physiciens,

$$l^2 - 1 = 0{,}000588\,\delta$$

cette loi prend la forme

$$\frac{r_1}{r} = \left(\frac{1+0{,}000588\,\delta}{1+0{,}000588\,\delta_1}\right)^{\frac{m}{2}}$$

(2) Nous avons adopté

$$\gamma = 0{,}075$$

valeur plus rapprochée de celles qui ont été admises par Delambre et par les marins. Il paraît que la Réfraction géodésique est plus forte en mer qu'à terre. Ces incertitudes disparaissent heureusement dans les nivellements à très-petites portées, ou par la méthode des distances zénithales réciproques et simultanées.

de la journée où les images des objets éloignés sont les plus ondulantes. — Au delà de ces limites, les réfractions géodésiques augmentent sensiblement, et peuvent varier dans des limites assez étendues, à mesure que le calme des images se rétablit. (1).

Si l'on pouvait mesurer la densité de l'air à deux hauteurs différentes (à l'aide du thermomètre et du baromètre) la formule. (p. 318, note.)

$$\frac{r_1}{r} = \left(\frac{1+0,0005885}{1+0,0005885_1}\right)^{\frac{m}{2}}$$

permettrait de déterminer la valeur actuelle de m, et par suite celle de r.

Mais il arrive rarement qu'on puisse déterminer ainsi la densité de l'air en deux points suffisamment éloignés, dans le sens vertical. D'ordinaire, on ne possède que les indications météorologiques propres à la station d'où l'on observe, et l'on ne peut en déduire la valeur actuelle du coefficient r que par la voie empirique. — Voici la meilleure formule de ce genre que je connaisse (M. Faye):

$$r = \left(0,0757 + \frac{0,1357}{A}\right)\frac{b}{0,760} \cdot 1,0118^{20-t}$$

dans laquelle t et b sont les indications du thermomètre centigrade et du baromètre métrique réduit à 0°, et A l'élévation moyenne de la trajectoire lumineuse au-dessus du sol (2).

---

(1) Dans la mesure de la base d'Ensisheim, en Alsace, énorme base de 20000 mètres de longueur, où le terrain, d'ailleurs favorable, présentait cependant vers le milieu une éminence qui masquait à un bout le signal de l'autre extrémité, le Colonel Henry et le commandant Delcros profitèrent habilement de l'accroissement de réfraction qui se manifeste dès trois heures de l'après-midi, pour faire les observations angulaires. Avant cette heure, le signal se trouvait masqué par le terrain; après cette heure, la réfraction, alors croissante, le soulevait peu-à-peu, pour ainsi dire, et le faisait apparaître au dessus du sol. — Le Général Baeyer a de même utilisé les réfractions extraordinaires qui rendent, à certaines époques de l'année, les côtes basses des îles danoises visibles du continent, pour les rattacher à sa belle triangulation du littoral prussien.

(2). Cette formule a été donnée récemment par un célèbre astronome russe, M. de Struve, dans son ouvrage sur la différence de niveau entre la mer Noire et la mer Caspienne. — Quand A est très petit, la trajectoire rase le sol, et la formule devient inapplicable. On doit éviter de tels cas dans la pratique, car c'est aussi près du sol que se produisent les plus grandes anomalies dans les réfractions (il s'agit de nivellements à grandes portées).

Nivellement Géodésique.

Il est toujours accompagné d'une triangulation qui donne, en mètres, les distances de stations projetées sur la surface théorique de l'ellipsoïde terrestre, c.à.d. sur la surface théorique du niveau de la mer idéalement prolongée au-dessous des continents.

Il y a là deux opérations distinctes.

1°. La mesure des différences de niveau de deux stations consécutives, soit par des observations de distances zénithales réciproques, mesurées simultanément aux deux stations, par deux observateurs, soit par une seule observation de distance zénithale. Le calcul de ces mesures donne la hauteur de chaque station au-dessus du niveau de la station précédente.

2°. La mesure de la hauteur absolue de la dernière station au-dessus du niveau moyen de la mer; elle s'obtient, soit par la mesure de la dépression de l'horizon de la mer, soit par un nivellement ordinaire qu'on conduit de cette station jusqu'à un piquet planté sur le rivage, vers la laisse de basse mer.

On nomme niveau moyen de la mer la moyenne entre une haute et une basse mer consécutives. Comme les hauteurs des marées varient avec le temps, on élimine la partie de cette variation qui est proportionnelle au temps en prenant la moyenne entre deux hautes mers consécutives, puis la demi-somme de cette hauteur moyenne et de la basse mer intermédiaire. — Il faut tenir compte des vents et de l'état du baromètre.

La formule de la différence de niveau entre $r'-r$ entre deux stations d'où l'on a observé des distances zénithales réciproques et simultanées, est

$$\frac{r'-r}{r'+r} = Tg\,\tfrac{1}{2}v\ Tg\,\tfrac{1}{2}(z_1'-z_1)$$

où r' et r représentent les distances des deux stations au centre de la sphère osculatrice le long de l'arc C qui joint les deux stations projetées sur le sphéroïde, v l'angle de ces rayons qu'on peut confondre avec les verticales locales, z_1' et z_1 les distances zénithales observées et affectées de la réfraction (apparentes).

Soient h et h' les altitudes des deux stations, c.à.d. leurs hauteurs absolues au-dessus de la surface du sphéroïde (au-dessus du niveau moyen de l'océan) ou au-dessus de la sphère osculatrice qui remplace localement cette surface, nous aurons

$$r'-r = h'-h$$

et

$$r'+r = 2R+h+h'$$

en désignant par R le rayon de la sphère osculatrice au milieu de l'arc C.

La formule précédente devient alors

$$h'-h = (2R+h'+h)\ Tg\,\tfrac{1}{2}v\ Tg\,\tfrac{1}{2}(z_1'-z_1) \qquad (1)$$

On néglige ordinairement le terme $h'+h$ dans le second membre, mais il est facile d'en tenir compte, car le nivellement précédent a fait connaître h, et une valeur approchée de $h'-h$ qu'on tirera de (1) en y négligeant une première fois $h'+h$ — aura toujours une exactitude bien suffisante pour le calcul définitif de la formule.

Quant aux réfractions, elles se trouvent entièrement éliminées, du moins dans l'hypothèse, admise ici, de leur égalité.

Quant à l'angle au centre v, exprimé en parties du rayon, il se déduit de l'arc géodésique C par la formule $Rv = c$.

Si, dans la formule approchée

$$h'-h = 2R\ Tg\,\tfrac{1}{2}v\ Tg\,\tfrac{1}{2}(z_1'-z_1)$$

en remplaçant $Tg\frac{1}{2}v$ par $\frac{1}{2}v = \frac{1}{2}\frac{c}{R}$, R disparaîtra, et l'on aura la formule très-commode

$$h' - h = c\,Tg\tfrac{1}{2}(z'_1 - z_1)$$

qui dispense de calculer R et v.

Si l'on n'a mesuré qu'une seule distance zénithale z_1, on remplacera dans l'équation précédente, z'_1 par sa valeur déduite de la relation fondamentale:

$$180° + v = z_1 + z'_1 + 2\gamma v \qquad \text{(voir la Refr. géodésique)}.$$

et l'on aura l'équation rigoureuse:

$$h' - h = (2R + h + h')\,Tg\tfrac{1}{2}v\,Cot\{z_1 - \tfrac{1}{2}v(1-2\gamma)\} \qquad (2)$$

que l'on peut encore écrire, par approximation, sous la forme plus simple

$$h' - h = c\,Cot\{z_1 - \tfrac{1}{2}v(1-2\gamma)\}$$

De même on aura $\quad h' - h = -c\,Cot\{z'_1 - \tfrac{1}{2}v(1-2\gamma)\}\quad$ si z'_1 a été seul mesuré.

Le cas (p. 320) où il s'agit de la hauteur absolue de la dernière station au-dessus du niveau de la mer, mérite une discussion spéciale. — Il est évident qu'il rentre dans le cas des distances zénithales réciproques et simultanées, car l'observateur placé à l'horizon visible d'une station quelconque verrait cette station par 90° de distance zénithale apparente. Seulement, dans ce cas, on ignore la longueur en mètres de l'arc c; et par conséquent on ne peut en déduire l'angle v. C'est par là que la réfraction revient dans le problème.

Soit donc $z'_1 = 90°$. On aura v par la relation fondamentale

$$180° + v = z_1 + z'_1 + 2\gamma v = z_1 + 90° + 2\gamma v$$

d'où

$$v = \frac{z_1 - 90°}{1 - 2\gamma}$$

qui, substitué dans (2), donne l'équation rigoureuse

$$h = (2R + h)\,Tg\tfrac{1}{2}\left(\frac{z_1 - 90°}{1-2\gamma}\right)Tg\tfrac{1}{2}(z_1 - 90°) \qquad (3)$$

qu'on peut écrire d'ordinaire comme il suit (en faisant $z_1 - 90° = d$ (Note (1)) et remplaçant les tangentes par les arcs

$$h = \tfrac{1}{2}R\,\frac{d^2 \sin^2 1''}{1-2\gamma} \qquad \text{ou} \qquad h = \tfrac{1}{2}R\,\frac{Tg^2 d}{1-2\gamma}$$

Pour donner une idée de ces calculs, appliquons la dernière formule à un exemple tiré des travaux géodésiques que le Commandant Delcros a exécutés en France.

Le 24 Novembre 1819, à $3^h\,58^m$ temps moyen, la distance zénithale de l'horizon de la mer, vu du haut de la tour de la cathédrale de Bayeux, était

$$z_1 = 90°\;17'\;22'',3$$

et au même instant, les instruments météorologiques de cette station donnaient

$$b = 0^m,75655 \text{ à zéro et } t = +5°,0$$

---

(1) Les marins nomment cet angle d la dépression apparente de l'horizon. Pour eux, h est connu. Il faut donc résoudre la formule par rapport à d, en écrivant:

$$d = \frac{\sqrt{1-2\gamma}}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2h}{R}} \qquad \text{ou} \qquad d = \frac{0{,}916}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2h}{R}}$$

en donnant à γ une valeur moyenne de 0,08.

Il serait plus exact de tenir compte des variations de γ, auquel les marins assignent avec raison une valeur un peu plus forte qu'à terre.

La formule dont ils se servent habituellement

$$d = \frac{1-\gamma}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2h}{R}}$$

n'est exacte qu'aux termes près du 2.e ordre en γ.

Quant à R, nous admettrons que l'observation a été faite dans le sens du méridien, et que par suite, R est le rayon de la sphère osculatrice dans le sens du méridien, au point dont la latitude est 40° 24' (celle de Bayonne). On trouve

$$Log\ \tfrac{1}{2}R = 6,50321,$$

par le calcul de la formule connue

$$R = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\cos^2\lambda)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{où } a = 6377398^m,\ e^2 = 0,0066744 \text{ et } \lambda = 40°24'$$

Le reste du calcul se réduit à

$$Log\ \tfrac{1}{2}R = 6,50321$$
$$2\ Log\ Tg\, d = 5,42532$$
$$Ct.\ Log(1-2\gamma) = 0,09045$$
$$Log\ h = 2,01898$$

ainsi la hauteur absolue de la station au-dessus du niveau de la mer, à l'instant de l'observation, était de $104^m,47$. Il faudrait encore défalquer de ce résultat la hauteur de la marée au-dessus ou au-dessous du niveau moyen de l'Océan ; c'est un calcul qu'on pourrait faire, puisque l'habile observateur a donné l'heure exacte de sa mesure (1).

La partie faible des nivellements géodésiques, quand les opérations n'ont pas été conduites de manière à éliminer la réfraction, dépend surtout de l'incertitude de la valeur de γ. En supposant parfaites toutes les autres parties de l'observation, l'erreur à craindre sur une différence de niveau, à cause de l'incertitude de γ, croît rapidement avec la distance, comme on en pourra juger par le tableau suivant :

angle au centre d'	distance des stations	incertitude sur h'-h
0° 10'	18519^m	$\pm\ 0^m,06$
0 30	55556	0,50
1 0	111111	1,98
1 30	166667	4,45
2 0	222222	7,90

De là résulte un désavantage marqué pour les nivellements à grande portée : ainsi si on détermine d'un seul coup la différence de niveau entre deux stations dont l'angle au centre est de 2°, l'incertitude sur le résultat sera de $\pm\ 7^m,90$, tandis que si l'on procède par stations intermédiaires de 10' en 10', l'incertitude sera seulement $0^m,06 \times \sqrt{12}$, 12 étant le nombre des mesures partielles. Cela fait $0^m,20$.

On voit ainsi combien il importe d'opérer par distances zénithales réciproques et simultanées, surtout quand les stations sont très distantes. Dans le nivellement ordinaire, on élimine la réfraction en plaçant l'instrument à mi-chemin entre les stations. Cette méthode, que l'on a suivie avec succès dans quelques opérations géodésiques, a, sur la précédente, l'avantage considérable de pouvoir être effectuée par un seul

(1) La formule rigoureuse (3) aurait donné $104^m,46$. — On trouve dans plusieurs ouvrages de géodésie justement estimés d'autres formules approximatives, telles que

$$h = \tfrac{1}{2} R\, Tg^2\left(\frac{d}{1-\gamma}\right) \qquad h = 2R(1-\gamma)^2\, Tg^2 d$$

auxquelles on ne pourrait ramener la formule rigoureuse qu'en négligeant les termes de l'ordre du carré, etc. de γ. Elles donnent ici 1^m ou 2^m d'erreur.

En thèse générale, avant d'employer des formules approchées, il est prudent de les comparer aux formules rigoureuses, pour savoir si elles offrent le degré d'approximation dont on a besoin dans un cas donné.

observateur (1), mais elle peut offrir, dans certains cas, bien des difficultés pour le choix des stations.

Détermination expérimentale du coefficient γ. – La relation fondamentale

$$180° + v = z_1 + z'_1 + 2\gamma v$$

donne γ lorsque les deux distances zénithales réciproques z_1 et z'_1 ont été mesurées simultanément, v étant d'ailleurs connu par les opérations géodésiques.

Voici les résultats les plus récents et les plus sûrs.

Triangulation de France,	Colonel Corabœuf	$\gamma = 0,0643$
de Russie	Mr. de Struve	$\gamma = 0,0618$
de Hanovre	Mr. Gauss	$\gamma = 0,0653$
de Prusse	Général Baeyer	$\gamma = 0,0620$

Ces valeurs sont relatives à la partie favorable de la journée. À d'autres heures, surtout au coucher du soleil, la réfraction croît, et son coefficient peut atteindre le double de cette valeur.

Malheureusement, ces heures ne sont pas favorables à l'exactitude du pointé, à cause du tremblement perpétuel des images. Aussi ne peut-on guère répondre de 3" sur une distance zénithale d'un objet terrestre (2). – Malgré cela, quelques nivellements géodésiques ont admirablement réussi : citons entre autres les belles opérations géodésiques du colonel Corabœuf entre l'Océan et la Méditerranée.

Cet éminent observateur avait eu soin de choisir les stations les plus élevées et les moins éloignées l'une de l'autre, afin de soustraire les trajectoires lumineuses aux réfractions irrégulières des couches les plus basses.

Ces inconvénients disparaissent dans les nivellements à petites portées.

Ajoutons que l'Héliotrope de Gauss est d'un très-grand secours dans ce genre délicat d'opérations : c'est un miroir mobile (Héliostat) qui forme signal pour un observateur éloigné.

---

(1). Dans la pratique, on ne s'astreint pas toujours malheureusement à la simultanéité des observations : on se borne souvent à mesurer successivement les distances zénithales, dans des circonstances aussi semblables que possible, par exemple aux mêmes heures de la journée.

À la vérité, les réfractions ne sont pas ainsi absolument éliminées ; mais elles n'interviennent plus que par leurs différences, toujours très-petites, si l'observateur a eu soin d'observer dans la partie de la journée où le coefficient γ présente des valeurs à peu-près constantes.

(2). Par une seule mesure ; naturellement, on a une précision plus grande en réitérant.

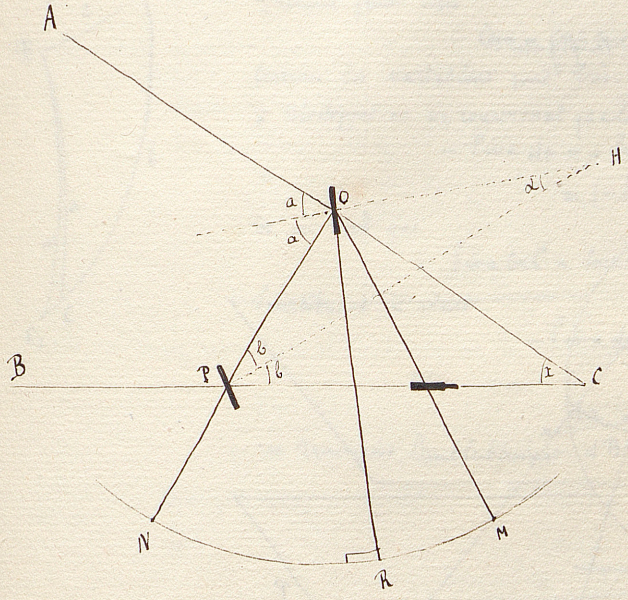
astronomie.

Théories diverses.

NLebaudry.

Principe du Sextant.

La Description de l'instrument est connue. — voici la démonstration simple du principe fondamental.



Soient A et B deux étoiles dont on veut mesurer la distance angulaire x.

x = angle ACB.

L'angle ROM, lu sur l'instrument, est égal à α, ou OHP, angle dont les côtés sont perp. sur ceux de ROM. Car le miroir en P est parallèle au rayon OM.

Les deux angles a et les deux angles b sont égaux respectivement comme angles d'incidence et de réflexion.

Cela posé :

Dans le triangle HOP, on a

$$\alpha = a - b.$$

Dans le triangle COP :

$$x = 2a - 2b$$

D'où

$$x = 2\alpha.$$

c.q.f.d.

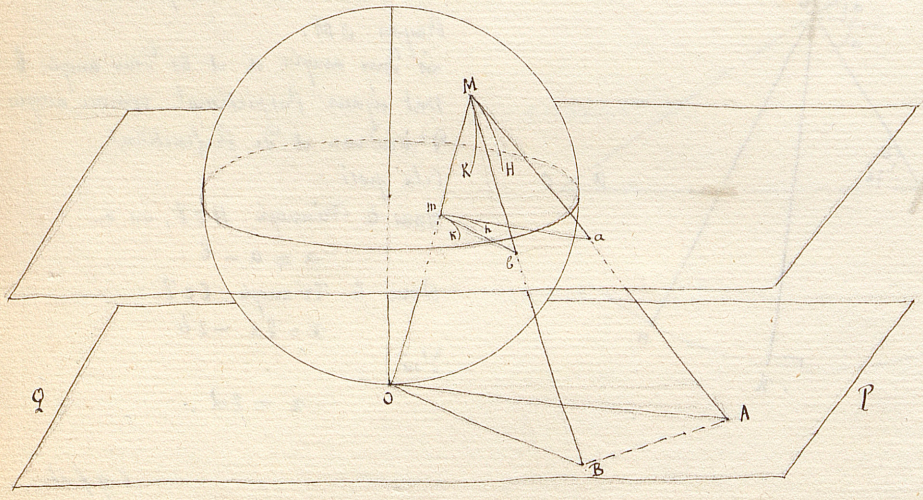
Projections Stéréographiques.

Théorème.

L'angle de deux courbes est égal à celui de leurs projections Stéréographiques.

On démontre d'abord que la projection d'une corde AB est la corde ab. — D'où il suit, à la limite, que la projection de la tangente à une courbe est la tangente de la projection.

Cela posé, faisons la figure.



Soient MH, MK deux courbes sphériques, mh, mk leurs projections.

Ma, Mb les tangentes en M ;

ma, mb leurs projections.

Menons PQ, plan tangent en O, et prolongeons Ma et Mb jusqu'à leurs intersections A et B avec ce plan.

L'angle amb = AOB, comme ayant leurs côtés parallèles.

Mais on a

$$\left.\begin{array}{l} AM = AO \\ BM = BO \end{array}\right\} \text{ comme tangentes à la sphère}$$

Donc

Triangle AOB = AMB

angle AOB = AMB

d'où

angle amb = AMB

c.q.f.d.

Trigonométrie Sphérique.

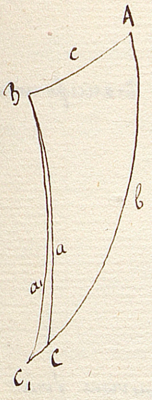
Problème.

Un triangle sphérique est donné par deux de ses côtés, c, b, et l'angle compris A. Un des éléments subit une variation. on demande celle de tous les autres.

Supposons que b devienne AC_1. et cherchons la variation de a.

Prenons pour cela

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$



Comme les variations sont très petites, il suffira de différentier (ce qui revient à développer en ne conservant que les quantités du 1[er] ordre).

$$-\sin a\, da = -\sin b \cos c\, db + \cos b \sin c \cos A\, db$$

$$= (-\sin b \cos c + \cos b \sin c \cos A)\, db$$

or on sait que

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A$$

Substituant, il vient

$$-\sin a\, da = -\sin a \cos C\, db$$

ou

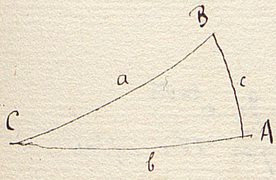
$$da = \cos C\, db$$

on trouverait semblablement dB et dC.

(Leverrier – 1849.)

Problème.

Résoudre un triangle rectangle, connaissant a et C.



Ce cas se présente souvent dans la pratique : a désigne la longitude d'un astre, et C l'obliquité du plan de son orbite sur celui de l'Écliptique.

C est donc en général très-petit.

on a les formules

$$\begin{cases} \sin c = \sin a \sin C \\ \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C \end{cases}$$

Il est nécessaire, pour la rapidité et la facilité du calcul, et pour la discussion des résultats, de transformer la 2[e]. formule. – Quant à la première, elle peut toujours subsister : car un très-petit angle peut très bien se calculer au moyen de son sinus.

Comment donc transformerons-nous la 2[e]. formule ?

D'abord, cela est indispensable : car, dans un intervalle de 5', aux environs de l'arc nul, le cosinus, dans les tables, a un logarithme nul, d'une valeur invariable. On ne peut donc se servir de $\cos C$ pour calculer $\operatorname{tg} b$. – Il en est de même du sinus pour les angles voisins de 90°. – on conclut de là que, sauf dans des cas particuliers, le sinus et le cosinus sont de mauvaises lignes trigonométriques, et qu'il faut toujours chercher à les éviter dans les formules générales. La tangente au contraire peut toujours et doit le plus souvent être de préférence employée, parce qu'elle varie avec une très-grande rapidité en même temps que l'angle.

Ainsi, C étant toujours petit, nous conserverons la première formule,

et nous allons transformer la seconde.

Posons

$$(1) \qquad b = a + x.$$

or on a

$$\operatorname{Tg} b = \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\dfrac{e^{b\sqrt{-1}} - e^{-b\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}}{\dfrac{e^{b\sqrt{-1}} + e^{-b\sqrt{-1}}}{2}}$$

on aurait de même Tg a. — Donc la formule que nous voulons transformer peut s'écrire

$$\frac{e^{b\sqrt{-1}} - e^{-b\sqrt{-1}}}{e^{b\sqrt{-1}} + e^{-b\sqrt{-1}}} = \cos C \; \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}$$

Divisant haut et bas par $e^{-b\sqrt{-1}}$ et $e^{-a\sqrt{-1}}$, il vient

$$\frac{e^{2b\sqrt{-1}} - 1}{e^{2b\sqrt{-1}} + 1} = \cos C \; \frac{e^{2a\sqrt{-1}} - 1}{e^{2a\sqrt{-1}} + 1}$$

Tirons de là $e^{2b\sqrt{-1}}$ afin d'avoir b en fonction de a : nous pourrons écrire

$$e^{2b\sqrt{-1}} = \frac{e^{2a\sqrt{-1}}(1+\cos C) + (1-\cos C)}{e^{2a\sqrt{-1}}(1-\cos C) + (1+\cos C)}$$

ou bien, en divisant haut et bas par $1+\cos C$, et remarquant que $\frac{1-\cos C}{1+\cos C} = \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} C$

$$e^{2b\sqrt{-1}} = \frac{e^{2a\sqrt{-1}} + \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} C}{e^{2a\sqrt{-1}} \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} C + 1}$$

ce qu'on peut écrire

$$e^{2b\sqrt{-1}} = e^{2a\sqrt{-1}} \cdot \frac{1 + \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} C . e^{-2a\sqrt{-1}}}{1 + \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} C . e^{2a\sqrt{-1}}}$$

on voit que, si C est très-petit, $e^{2b\sqrt{-1}}$ diffère très-peu de $e^{2a\sqrt{-1}}$.

Prenant les Logarithmes népériens, et divisant par $2\sqrt{-1}$, j'ai

$$b = a + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \, \mathrm{L}. \frac{1 + \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} C . e^{-2a\sqrt{-1}}}{1 + \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} C . e^{2a\sqrt{-1}}}$$

d'où

$$x = b - a = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \mathrm{L}\left(1 + \operatorname{Tg}^2 \tfrac{1}{2} C . e^{-2a\sqrt{-1}}\right) - \mathrm{L}.\left(1 + \operatorname{Tg}^2 \tfrac{1}{2} C . e^{2a\sqrt{-1}}\right) \right\}.$$

Développant en séries nous aurons :

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} C . e^{-2a\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} \operatorname{Tg}^4 \frac{1}{2} C . e^{-4a\sqrt{-1}} + \frac{1}{3} \operatorname{Tg}^6 \frac{1}{2} C . e^{-6a\sqrt{-1}} - \text{etc.} \\ - \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} C . e^{2a\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} \operatorname{Tg}^4 \frac{1}{2} C . e^{4a\sqrt{-1}} - \frac{1}{3} \operatorname{Tg}^6 \frac{1}{2} C . e^{6a\sqrt{-1}} + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

Nous pouvons réduire. Car les deux termes en $\operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} C$ donnent

$$- \operatorname{Tg}^2 \tfrac{1}{2} C \times \frac{e^{2a\sqrt{-1}} - e^{-2a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \qquad \text{ou} \qquad - \operatorname{Tg}^2 \tfrac{1}{2} C . \sin 2a$$

et de même pour les autres. — Remplaçons donc, et ayons égard à ce que $x = b - a$. Il viendra :

$$b = a - \mathrm{Tg}^2 \tfrac{1}{2} c . \sin 2a + \tfrac{1}{2} \mathrm{Tg}^4 \tfrac{1}{2} c . \sin 4a - \tfrac{1}{3} \mathrm{Tg}^6 \tfrac{1}{2} c . \sin 6a + \text{etc.}$$

on aurait trouvé de même

$$a = b + \mathrm{Tg}^2 \tfrac{1}{2} c . \sin 2b + \tfrac{1}{2} \mathrm{Tg}^4 \tfrac{1}{2} c . \sin 4b + \tfrac{1}{3} \mathrm{Tg}^6 \tfrac{1}{2} c . \sin 6b + \text{etc.}$$

Reste à approprier ces formules de manière que ces lettres, qui représentent des rapports au rayon, représentent des minutes et des secondes. — Il n'y a pour cela qu'à diviser a, b, c par la valeur de 1". — Mais cela est supposé fait. Ce sont seulement les nombres abstraits Tg. Sin. qu'il faut diviser par 1". Mais, dans les tables, on divise par Sin 1", ce qui revient au même, car 1" et Sin 1" ne diffèrent qu'à la 12e décimale.

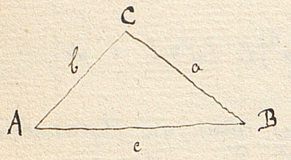
De même, au lieu de 2 Sin 1", 3 Sin 1", … on met Sin 2", Sin 3", …

On a d'ailleurs

$$\mathrm{Log} \frac{1}{\sin 1''} = 5{,}3144251.$$

---

application du Théorème de Legendre.



$AB = 32584^{m},62$

$A = 64^\circ\ 24'\ 17'',3$

$B = 52^\circ\ 41'\ 20'',5$

Calculer les autres parties, en supposant le Triangle Sphérique, sur la Terre.

D'abord, calculons l'excès Sphérique, et pour cela, la surface du Triangle supposé Rectiligne

$$S = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin (A+B)}.$$

on trouve

$$\text{Log } S = 8,6311833.$$

Le $\frac{1}{3}$ de l'excès Sphérique est $\frac{1}{3}\frac{S}{R^2}$. Et ici $R = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ α et β étant les axes de la Terre. $R = 6366739^{m}$.

$$\text{Log } R = 6,8039171$$
$$2 \text{ Log } R = 13,6078342$$

d'où

$$C^t \text{ Log } R^2 = \overline{14},3921658$$
$$C^t \text{ Log } 3 = 9,5228787$$

Donc

$$\text{Log. } \tfrac{1}{3} \text{ Excès Sph.} = \overline{6},5462278.$$

Il faut réduire en Secondes.

$$\text{Log } 648000'' = 5,8115750$$
$$C^t \text{ Log } \pi = 9,5028502$$

$$\overline{1},8606530$$

Donc

$$\frac{1}{3}\frac{S}{R^2} = 0'',72.$$

au lieu de résoudre le Triangle Sphérique, nous résoudrons donc le Triangle Rectiligne dont voici les Eléments.

$AB = 32584^{m},62$

$A' = 64^\circ\ 24'\ 16'',6$

$B' = 52^\circ\ 41'\ 19'',8$

$C' = 62^\circ\ 54'\ 23'',6$

on trouve

$b = 29110^{m}\ 83$

et

$a = 33009^{m},28.$

Calcul des Dimensions de la Terre.

Problème.

Connaissant les longueurs de deux arcs de 1° pris sur un méridien, et leurs Latitudes moyennes, trouver les Dimensions de la Terre.

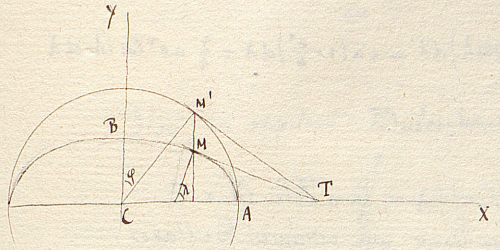
Cela revient à chercher l'expression d'un arc d'Ellipse en fonction des axes et de la Latitude.

Soit en A l'origine des arcs. On a

$$ds = -dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

D'ailleurs

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



Changeons de variable, et posons

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\sin\varphi \\ y = b\cos\varphi \end{array}\right\} \text{ ce que l'on peut faire évidemt.}$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{l} dx = a\cos\varphi\, d\varphi \\ dy = -b\sin\varphi\, d\varphi \end{array}\right.$$

et par suite

$$ds = -a\cos\varphi\, d\varphi\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}^2\varphi} = -a\,d\varphi\sqrt{\frac{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}{a^2}} = -a\,d\varphi\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\varphi}{a^2}}$$

et, en posant $a^2-b^2=a^2e^2$

$$ds = -a\,d\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$$

Il faut remplacer dans cette expression l'angle φ par l'angle de la normale avec le grand axe de l'Ellipse. Soit λ cet angle.

Or, il est facile de voir que l'angle φ est sur la figure l'angle BCM'. — Par le point M', menons une tangente. Elle rencontrera l'axe des x au même point que la tangente en M. — On a $\lambda = 90° - MTC$ et $M'TC = \varphi$. — D'ailleurs, on a évidemment

$$\frac{\operatorname{tg} MTC}{\operatorname{tg} M'TC} = \frac{b}{a}$$

d'où

$$\operatorname{tg}\lambda\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b} \qquad (1)$$

ainsi

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}\cot\lambda \qquad \sin\varphi = \frac{\cos\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\lambda}} \qquad \cos\varphi = \frac{\sin\lambda\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2\lambda}}$$

Il en résulte que

$$\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi} = \sqrt{1-e^2\frac{\cos^2\lambda}{1-e^2\sin^2\lambda}} = \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\lambda}}$$

Il faut calculer $d\varphi$. — or, si l'on différentie l'équation (1), il vient

$$\operatorname{tg}\varphi\frac{d\lambda}{\cos^2\lambda} + \operatorname{tg}\lambda\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = 0$$

D'où

$$d\varphi = -\operatorname{tg}\varphi\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\lambda}\frac{d\lambda}{\operatorname{tg}\lambda} = -d\lambda\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\lambda\cos\lambda}$$

$$d\varphi = -d\lambda\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2\lambda}.$$

D'où

$$ds = +a \frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}} d\lambda$$

ainsi l'expression à intégrer est

$$ds = +a(1-e^2)(1-e^2\sin^2\lambda)^{-\frac{3}{2}} d\lambda$$

Négligeons $\sin^4\lambda$. Il vient

$$ds = +a(1-e^2)(1+\tfrac{3}{2}e^2\sin^2\lambda)d\lambda = +a(1-e^2)\left\{1+\tfrac{3}{2}e^2\left(\frac{1-\cos 2\lambda}{2}\right)\right\}d\lambda$$

$$= +a(1-e^2)(1+\tfrac{3}{4}e^2 - \tfrac{3}{4}e^2\cos 2\lambda)d\lambda = +a(1-\tfrac{e^2}{4})d\lambda + \tfrac{3}{4}ae^2\cos 2\lambda\, d\lambda$$

(en négligeant e^4). – Intégrant, il vient

$$s = +a(1-\tfrac{e^2}{4})\lambda + \tfrac{3}{8}ae^2\sin 2\lambda + C$$

Soient λ et λ' les angles correspondants aux extrémités de l'arc :

$$S = a(1-\tfrac{e^2}{4})(\lambda'-\lambda) - \tfrac{3}{8}ae^2(\sin 2\lambda' - \sin 2\lambda)$$

$$S = a(1-\tfrac{e^2}{4})(\lambda'-\lambda) - \tfrac{3}{4}ae^2\sin(\lambda'-\lambda)\cos(\lambda+\lambda')$$

Si $\lambda'-\lambda = 1°$ et $\frac{\lambda+\lambda'}{2} = L$ = latitude moyenne : alors, $\sin(\lambda'-\lambda)$ peut être confondu avec $\lambda'-\lambda = 1°$, dont la longueur est $\frac{\pi}{180}$: et il vient

$$S = \frac{a\pi}{180}\left(1-\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}e^2\cos 2L\right)$$

Pour un autre arc de l'Ellipse dont la latitude moyenne serait L', on aurait de même

$$S' = \frac{a\pi}{180}\left(1-\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}e^2\cos 2L'\right)$$

Ce sont deux Equations qui serviront à déterminer <u>a</u> et <u>e</u>.

On trouve

$$e^2 = \frac{4(S'-S)}{S'-S+3\{S'\cos 2L - S\cos 2L'\}}$$

$$a = \frac{180}{\pi}\,\frac{S'-S+3\{S'\cos 2L - S\cos 2L'\}}{3\{\cos 2L - \cos 2L'\}}$$

application.

$S = 57023^T$ $\quad L = 46°\ 8'\ 6''$

$S' = 57196^T$ $\quad L' = 66°\ 20'\ 10''$

D'où

$e^2 = 0{,}006329584$ $\quad a = 3271766^T$ $\quad b = 3261395^T$

Remarque.

Les formules précédentes peuvent servir à calculer exactement la lon-

-gueur de la Circonférence d'une Ellipse.

Reprenons en effet la formule

$$ds = a(1-e^2)(1-e^2\sin^2\lambda)^{-\frac{3}{2}}\,d\lambda.$$

on pourrait développer $(1-e^2\sin^2\lambda)^{-\frac{3}{2}}$, et, intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on aurait une série qui exprime la longueur du quart de l'Ellipse.

Il vaut mieux, pour la simplicité du calcul, prendre

$$ds = -a\,d\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$$

ou

$$ds = -a(1-e^2\sin^2\varphi)^{+\frac{1}{2}}d\varphi$$

J'ai, en appelant E le quart de l'Ellipse

$$E = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -a(1-e^2\sin^2\varphi)^{+\frac{1}{2}}d\varphi = a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-e^2\sin^2\varphi)^{+\frac{1}{2}}d\varphi.$$

Développons en Série. — Nous aurons facilement

$$E = a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\cdot\frac{1.3}{2.4}e^4\sin^4\varphi - \frac{1}{5}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}e^6\sin^6\varphi - \frac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^8\sin^8\varphi - \dots\right)d\varphi$$

Mais on sait que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}x\,dx = \frac{1.3.5.7\dots(2p-1)}{2.4.6.8\dots 2p}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \text{(Raabe, page 239).}$$

D'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\,d\varphi = \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi\,d\varphi = \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8\varphi\,d\varphi = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{\pi}{2}. \text{ etc.}$$

Substituant, on aura donc

$$E = \frac{a\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^4\right)^2 - \text{etc.}\right\}$$

Application.

Trouver la Longueur du mètre, sachant que les axes de l'Ellipsoïde Terrestre sont

$$a = 3272077^T$$
$$b = 3261139$$

On prend la formule précédente, bornée à ses 2 premiers termes, avec

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{(a+b)(a-b)}{a^2}$$

on trouve

$$E = 5131180^T$$

Donc la longueur du mètre est $0^T,513118$. — Le mètre légal a $0^T,513074$. La différence est de $0^l,038$.

Formule d'Interpolation de Lagrange.

Soit u une fonction d'x.

on connait trois valeurs u_0 u_1 u_2 correspondant à x_0 x_1 x_2

trouver la valeur u qui correspond à x.

Posons

$$u = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

Nous aurons

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = ax_0^2 + bx_0 + c \\ u_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ u_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \end{array}\right.$$

ces trois équations vont nous donner a, b, c.

Si l'on fait le calcul, qu'on substitue dans l'équation (1), et qu'on y mette u_0 u_1 et u_2 en facteurs, on y trouve ce résultat simple et très-symétrique

$$u = u_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + u_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + u_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

---

application.

Le 24 avril 1844 à $11^h\ 17^m\ 38^s$ de temps moyen du lieu de l'observation, on a trouvé par le calcul que la distance vraie de α de la Vierge au centre de la Lune est

$$81^\circ\ 53'\ 10''$$

on demande la longitude du lieu.

Il suffit de chercher d'après la connaissance des temps l'heure de Paris à laquelle correspond la distance observée.

En désignant par u les heures, par x les distances lunaires, voici ce que l'on trouve dans les tables.

$$x_0 = 81^\circ\ 55'\ 24'' \qquad u_0 = 21^h$$
$$x_1 = 80\ \ 20\ \ 50 \qquad u_1 = 24$$
$$x_2 = 78\ \ 45\ \ 57 \qquad u_2 = 27$$

on pourrait chercher simplement par une proportion l'heure correspondante à

$$x = 81^\circ\ 53'\ 10''$$

et l'on trouverait

$$u = 21^h\ 4^m\ 15^s$$

Cherchons maintenant par interpolation: et appliquons la formule précédente. Nous aurons

$$u = 21 . \frac{1^\circ 32' 20'' \times 3^\circ 7' 13''}{1\ 34\ 34 \times 3\ 9\ 27} + 24 \frac{2' 14'' \times 3^\circ 7' 13''}{1^\circ 34' 34'' \times 1^\circ 34\ 53} - 27 \frac{2' 14'' \times 1^\circ 32' 20''}{3^\circ 9' 27'' \times 1\ 34\ 53}$$

$$u = 21 . \frac{5540 . 11233}{5674 . 11367} + 24 . \frac{134 . 11233}{5674 . 5693} - 27 . \frac{134 . 5540}{11367 . 5693}$$

Calculant par logarithmes, on trouve

$$u = 20,262 + 1,118 - 0,309$$

ou bien

$$21^h \quad 4^m \quad 12^s$$

La différence des heures est donc

$$9^h \quad 26^m \quad 34^s$$

Réduisant en degrés, on trouve

$$146^\circ \quad 38' \quad 30''$$

La longitude du lieu est d'ailleurs occidentale.

Si l'on eût simplement fait usage des parties proportionnelles, on eût trouvé pour la différence des heures

$$9^h \quad 26^m \quad 37^s$$

correspondant à une longitude Ouest

$$146^\circ \quad 39' \quad 15''$$

Le problème suivant va nous montrer comment on peut calculer la distance vraie, c.à.d. rapportée au centre de la Terre.

Problème.

Un observateur placé à 7m. au-dessus de la mer observe la hauteur apparente du centre de la Lune $= 42^\circ\ 3'\ 25''$, la hauteur apparente d'une Etoile $= 53^\circ\ 18'\ 36''$, enfin la distance apparente de ces deux astres $= 37^\circ\ 43'\ 17''$. – Calculer la distance vraie. (x)

(x) Sachant que la parallaxe horizontale de la Lune au mom.t de l'observation est 58' 46".

1°. La première chose à faire, c'est de corriger ces hauteurs de la dépression de l'horizon. – or, il y a des Tables pour cela (il doit y en avoir).

D'ailleurs, à défaut de Tables, il me semble qu'on pourrait agir de la manière suivante.

Soit δ la dépression, h la hauteur au-dessus de la mer, r le rayon moyen de la Terre 6366740m (ou mieux peut-être, le rayon de courbure de l'ellipse pour la latitude λ : $\rho = \frac{ds}{d\lambda} = a(1-e^2)(1-e^2\sin^2\lambda)^{-\frac{3}{2}}$.) on a

$$\frac{r}{r+h} = \cos\delta = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\delta$$

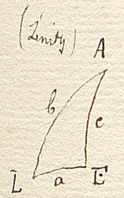
d'où

$$\sin^2\frac{\delta}{2} = \frac{h}{2(h+r)}$$

(En appliquant cette formule, je trouve ici pour la dépression 4' 36" : tandis que Burnet met 4' 46" : pourquoi ?)

D'ailleurs, on peut déterminer directement la dépression de l'horizon au moyen de deux observations faites avec le sextant et une même étoile. Supposons celle-ci près du zénith. observons rapidement sa hauteur H au-dessus de l'horizon ; retournons-nous de 180°, et observons sa hauteur H'. H' devrait être le supplément de H. donc H' + H – 180° donne le double de la dépression.

2°. Les deux hauteurs étant corrigées de la dépression, on en déduit les distances zénithales corrigées de la dépression seulement.



Elles servent à calculer l'angle des deux azimuths, par la formule

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin S \cdot \sin(S-a)}{\sin b \sin c}}$$

applicable dans le triangle apparent ALE dont on connaît les 3 côtés.

3°. Cela fait, et A trouvé, on corrige la distance zénithale de la Lune

de la Réfraction et de la parallaxe, et celle de l'Etoile de la Réfraction. — on a ainsi les distances zénithales vraies et A : on peut avoir la vraie valeur de a.

car

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$= \cos b \left(\cos c + \operatorname{tg} b \sin c \cos A \right)$$

on pose

$$\operatorname{tg} b \cos A = \operatorname{tg} \varphi$$

d'où

$$\cos a = \cos b \left(\cos c + \operatorname{tg} \varphi \sin c \right) = \frac{\cos b}{\cos \varphi} \cos (c - \varphi)$$

d'où a.

Quant aux corrections de Réfraction et de parallaxe, voir Francoeur.

---

voir le même pour la détermination de l'heure.
